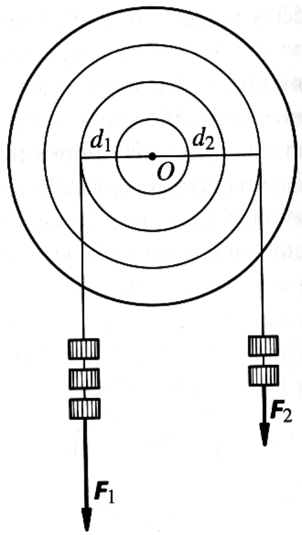
Platnost momentové věty ověříme pokusem na momentovém kotouči (obr. 6-7). Síla $\boldsymbol{F}_1$ působí ve vzdálenosti d_1 od osy otáčení, moment $\boldsymbol{M}_1$ této síly leží v ose otáčení, má velikost $M_1 = F_1 d_1$ a směřuje dopředu. Síla $\boldsymbol{F}_2$ působí ve vzdálenosti d_2 od osy otáčení, moment $\boldsymbol{M}_2$ této síly má velikost $M_2 = F_2 d_2$, leží rovněž v ose otáčení, ale směřuje dozadu. Oba momenty leží v téže přímce a mají navzájem opačný směr. Otáčivý účinek sil se ruší, je-li vektorový součet momentů nulový, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{0}$ neboli $\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2$. Odtud je zřejmé, že velikosti obou momentů musí být stejné, musí platit $M_1 = M_2$ neboli $F_1 d_1 = F_2 d_2$.



6-7 Ověření momentové věty pokusem

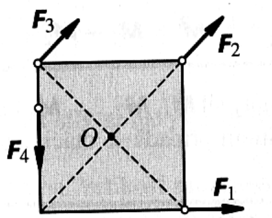
Úlohy

1 Změní se moment síly vzhledem k ose otáčení, posuneme-li působiště síly do jiného bodu její vektorové přímky? Odpověď zdůvodněte.

2 Změní se moment síly vzhledem k ose otáčení, změní-li se směr síly? Odpověď zdůvodněte.

3 Ověřte pokusem na momentovém kotouči platnost momentové věty a) pro tři síly, b) pro čtyři síly.

4 Čtvercová deska o straně 1 m je otáčivá kolem osy jdoucí jejím středem a kolmé k rovině desky. Na desku působí síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_4$ podle obr. 6-8. Všechny síly leží v rovině desky a mají stejnou velikost 20 N. a) Vypočtěte velikosti momentů jednotlivých sil vzhledem k ose otáčení. b) Určete velikost a směr výsledného momentu sil působících na desku.



6-8

[a) $M_1 = 10\,\mathrm{N \cdot m}$, $M_2 = 0$, $M_3 = 14\,\mathrm{N \cdot m}$, $M_4 = 10\,\mathrm{N \cdot m}$;
b) $M = 6\,\mathrm{N \cdot m}$, $\boldsymbol{M}$ je kolmý k nákresně a směřuje před nákresnu]

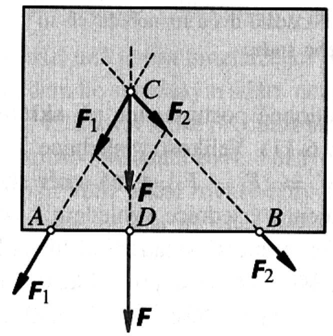
6.3 Skládání sil

Skládat síly působící na tuhé těleso znamená nahradit tyto síly jedinou silou, která má na těleso stejné účinky jako skládané síly. Tato síla se nazývá **výslednice sil**. Výslednice $\boldsymbol{F}$ je určena svou velikostí, směrem a polohou působiště. Velikost a směr výslednice jsou dány vektorovým součtem jednotlivých sil:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n$$

Síly působící v jednom bodě tělesa složíme pomocí vektorového rovnoběžníku stejně jako síly působící na hmotný bod. Působiště výslednice je pak ve společném působišti skládaných sil.

Uvažujme nyní, že na těleso působí dvě různoběžné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ v různých bodech A a B tělesa (obr. 6-9). Obě síly přeneseme po jejich vektorových přímkách do průsečíku C vektorových přímek. V bodě C je složíme pomocí vektorového rovnoběžníku. Působiště výslednice $\boldsymbol{F}$ obvykle přenášíme po její vektorové přímce do bodu D, který leží na spojnici bodů A a B. Podobně postupujeme při skládání libovolného počtu různoběžných sil.



6-9 Skládání dvou různoběžných sil

Aby měla výslednice sil stejné otáčivé účinky jako skládané síly, musí se moment výslednice vzhledem k libovolné ose rovnat součtu momentů skládaných sil vzhledem k téže ose:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n$$

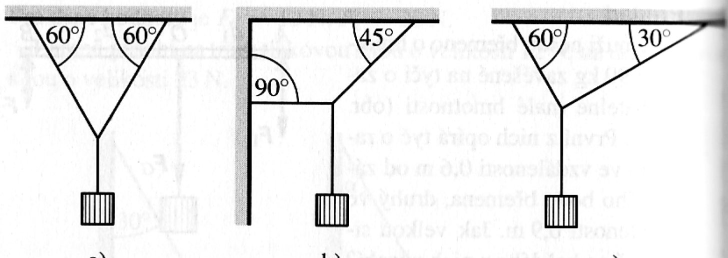
Tohoto poznatku využijeme při hledání **výslednice rovnoběžných sil** působících na tuhé těleso.

Působí-li na těleso dvě **rovnoběžné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ stejného směru** (obr. 6-10), je velikost jejich výslednice F rovna součtu velikostí obou sil, $F = F_1 + F_2$. Polohu působiště O výslednice najdeme pomocí momentů sil. Moment výslednice vzhledem k ose jdoucí jejím působištěm je nulový. Součet momentů obou skládaných sil vzhledem k téže ose musí být také nulový. Otáčivé účinky obou sil se navzájem ruší, momenty $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$ mají stejnou velikost, ale navzájem opačný směr. Pro velikosti momentů sil platí $M_1 = M_2$, podle obr. 6-10 je tedy $F_1 d_1 = F_2 d_2$.

Úlohy

Dosazujte tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1 Vypočtěte velikosti sil působících na každé lano, je-li těleso o hmotnosti 100 kg zavěšeno podle obr. 6-20 a), b), c).



6-20 K úloze 1

[a) $F_1 = F_2 = mg\sqrt{3}/3 = 580$ N; b) $F_1 = mg = 1\,000$ N, $F_2 = mg\sqrt{2} = 1\,400$ N; c) $F_1 = mg\sqrt{3}/2 = 870$ N, $F_2 = mg/2 = 500$ N]

2 Tyč o délce 1 m a zanedbatelně malé hmotnosti je podepřena na obou koncích. Na tyč zavěšíme těleso o hmotnosti 20 kg. Kam je třeba umístit závěs tělesa, aby na pravou podpěru působila síla o velikosti 160 N? Jak velká síla působí na levou podpěru?

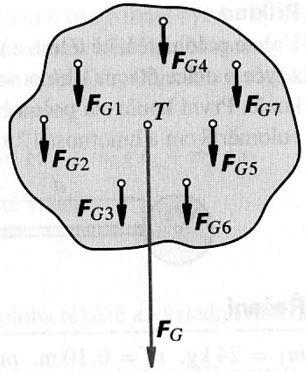
[do vzdálenosti 0,2 m od pravé podpěry, 40 N]

6.6 Těžiště tuhého tělesa

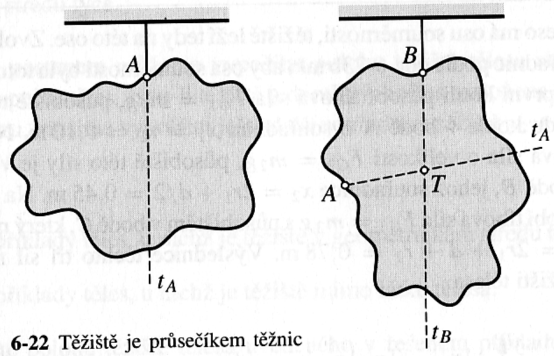
Tuhé těleso si představujeme složené z velkého počtu hmotných bodů, jejichž vzájemné polohy se nemění. V homogenním tíhovém poli působí na jednotlivé body tělesa tíhové síly, které jsou navzájem rovnoběžné. Jejich složením dostaneme výslednou tíhovou sílu $\boldsymbol{F}_G$ působící na těleso. Tíhová síla má působiště v bodě T, který se nazývá **těžiště tělesa** (obr. 6-21).

Těžiště tuhého tělesa je působiště tíhové síly působící na těleso v homogenním tíhovém poli.

Připomeňme si experimentální určování polohy těžiště tělesa, jak je znáte ze základní školy. Těleso tvaru nepravidelné desky zavěšujeme v různých bodech na obvodu desky (obr. 6-22). Při každém zavěšení se těleso ustálí tak, že těžiště je pod bodem závěsu. Přímka spojující bod závěsu a těžiště se nazývá **těžnice**. Těžiště T je průsečíkem všech těžnic.



6-21 Těžiště tělesa je působiště výsledné tíhové síly ▸



6-22 Těžiště je průsečíkem těžnic

Poloha těžiště je dána rozložením látky v tělese. Těžiště stejnorodých těles, která mají **střed souměrnosti**, je v tomto středu. Těžiště stejnorodé koule, krychle, kvádru nebo válce je v jejich geometrickém středu. Jestliže má stejnorodé těleso **osu souměrnosti**, je těžiště na této ose. Např. těžiště rotačního kužele je na jeho rotační ose. U stejnorodých těles, která mají **rovinu souměrnosti**, je těžiště v této rovině.

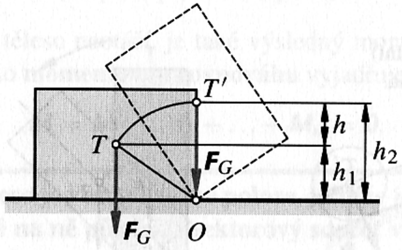
Těžiště tělesa může být i mimo látku tělesa. Tak je tomu u dutých těles, jako je dutá koule, krychle, válec. Mimo látku tělesa je těžiště prstence, podkovy, ohnutého drátu apod.

Polohu těžiště nestejnorodých nebo geometricky nepravidelných těles určujeme zpravidla experimentálně. U pravidelných těles můžeme určit polohu těžiště výpočtem. Postup při výpočtu polohy těžiště si ukážeme na příkladu.

6

Těleso **podepřené na ploše** je ve stálé rovnovážné poloze, jestliže svislá těžnice prochází podstavou tělesa. U těles podepřených na ploše má velký význam **stabilita tělesa**.

Uvažujme stejnorodý kvádr, který stojí na vodorovné podložce (obr. 6-27). Kvádr je v rovnovážné poloze, svislá těžnice prochází podstavou kvádru. Otáčíme-li kvádr kolem jedné hrany podstavy, pozorujeme při malých výchylkách, že se kvádr vrací zpět do původní polohy – je ve stálé rovnovážné poloze.



6-27 Určení stability tělesa

Jestliže výchylku zvětšíme tak, že těžiště kvádru je nad hranou podstavy a svislá těžnice prochází touto hranou, je kvádr ve vratké rovnovážné poloze. Při malém zvětšení výchylky se kvádr převrátí na jinou podstavu.

Stabilitu tělesa určuje **práce**, kterou musíme vykonat, abychom těleso přemístili ze stálé rovnovážné polohy do polohy vratké.

U kvádru znázorněného na obr. 6-27 se těžiště zvedlo z původní výšky h_1 do výšky h_2. Práce vykonaná při zvednutí těžiště kvádru o hmotnosti m o výšku $h = h_2 - h_1$ je rovna přírůstku potenciální energie kvádru:

$$W = mg(h_2 - h_1)$$

Stabilita tělesa je tím větší, čím větší je hmotnost tělesa, čím níže je těžiště ve stálé rovnovážné poloze a čím větší je vzdálenost svislé těžnice od podstavné hrany.

Úlohy

1 Ukažte stálou, vratkou a volnou rovnovážnou polohu u rotačního kužele a válce.

2 Stejnorodý válec a stejnorodý kužel mají stejnou hmotnost, stejnou podstavu a stejnou výšku. Které těleso má větší stabilitu? Odpověď zdůvodněte.

3 Jakou práci musíme vykonat, abychom stejnorodou krychli o hraně 0,5 m a hmotnosti 900 kg překlopili kolem jedné hrany? [0,9 kJ]

4 Dvě stejné bedny stojí na vodorovné podlaze. Jedna z beden je naplněna až po okraj pískem, ve druhé je do poloviny nasypán železný odpad. Hmotnosti beden s obsahem jsou stejné. Která bedna má větší stabilitu a proč?

5 Hliníkový a železný válec mají stejné rozměry a stojí na vodorovné podložce. Který válec má větší stabilitu? Odpověď zdůvodněte.

6.8 Kinetická energie tuhého tělesa

Tuhé těleso může konat pohyb posuvný nebo pohyb otáčivý, popř. oba tyto pohyby současně.

Při **posuvném pohybu** opisují všechny body tělesa stejné trajektorie a v každém okamžiku mají stejnou rychlost v. Kinetická energie tělesa je rovna součtu kinetických energií jednotlivých bodů:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_nv^2$$

Vytkneme-li z tohoto součtu $v^2/2$, je

$$E_k = \frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2 + \ldots + m_n).$$

Protože $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$ je celková hmotnost tělesa, je kinetická energie tělesa při posuvném pohybu dána vztahem

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetická energie tělesa o hmotnosti m, pohybujícího se posuvným pohybem rychlostí $\boldsymbol{v}$, je rovna kinetické energii hmotného bodu se stejnou hmotností a stejnou rychlostí.

Při **otáčivém pohybu** tuhého tělesa kolem nehybné osy opisují body tělesa kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení (obr. 6-28). Úhlová rychlost ω je pro všechny body stejná, rychlosti jednotlivých bodů jsou přímo úměrné poloměrům kružnic, po nichž se pohybují, tedy $v_1 = r_1\omega, v_2 = r_2\omega, \ldots, v_n = r_n\omega$.

6

4 Proč se vyvažují kola automobilů?

5 Vypočtěte kinetickou energii plného homogenního válce o hmotnosti 5,0 kg a poloměru 0,20 m, jestliže se válec a) pohybuje posuvným pohybem rychlostí 6,0 m · s^{-1}, b) otáčí kolem své rotační osy tak, že body na obvodu válce mají rychlost o velikosti 6,0 m · s^{-1}, c) valí bez prokluzování rychlostí 6,0 m · s^{-1}. [a) 90 J; b) 45 J; c) 135 J]

Shrnutí učiva 6. kapitoly

Tuhé těleso je ideální těleso, jehož tvar ani objem se působením libovolně velkých sil nemění.

Tuhé těleso může konat pohyb posuvný, pohyb otáčivý nebo oba tyto pohyby současně. Při **posuvném pohybu** (translaci) opisují všechny body tělesa stejné trajektorie a v daném okamžiku mají stejnou rychlost $\boldsymbol{v}$. Při **otáčivém pohybu** (rotaci) kolem nehybné osy opisují body tělesa kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení, přičemž všechny body mají stejnou úhlovou rychlost ω.

Otáčivý účinek síly na tuhé těleso vyjadřuje fyzikální veličina **moment síly vzhledem k ose otáčení**. Moment síly $\boldsymbol{M}$ je vektor, který leží v ose otáčení a má velikost

$$M = Fd,$$

kde F je velikost působící síly a d rameno síly neboli kolmá vzdálenost vektorové přímky síly od osy otáčení. Směr momentu síly určujeme pomocí pravidla pravé ruky.

Působí-li na tuhé těleso více sil, platí **momentová věta**. Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso se ruší, je-li vektorový součet momentů sil vzhledem k ose otáčení nulový, tedy $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n = \boldsymbol{0}$.

Pomocí momentu síly vzhledem k ose otáčení řešíme případy skládání a rozkládání sil. Při **skládání sil** nahrazujeme dvě nebo více sil (složky) jedinou silou (výslednicí), která má na těleso stejný pohybový účinek jako skládané síly. Při **rozkládání síly** na složky nahrazujeme danou sílu dvěma nebo více silami, které mají na těleso stejný pohybový účinek jako daná síla.

Dvě stejně velké rovnoběžné síly navzájem opačného směru tvoří **dvojici sil**. Tyto síly nelze nahradit výslednicí. **Otáčivý účinek** dvojice sil vyjadřuje **moment dvojice sil $\boldsymbol{D}$**. Jeho velikost je dána vztahem

$$D = Fd,$$

kde F je velikost jedné síly a d rameno dvojice sil neboli vzájemná vzdálenost vektorových přímek obou sil.

Působiště tíhové síly, která působí na těleso v homogenním tíhovém poli, je **těžiště tělesa**. Poloha těžiště je dána rozložením látky v tělese.

Zavěšené nebo podepřené těleso, které je v klidu, je v **rovnovážné poloze**, prochází-li svislá těžnice bodem závěsu nebo podpěrným bodem. Podmínky rovnováhy vyjadřují vztahy $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{0}$ (rovnováha sil) a $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n = \boldsymbol{0}$ (rovnováha momentů sil).

Rovnovážná poloha tělesa může být stálá, vratká nebo volná, podle toho, jak se mění tíhová potenciální energie tělesa při vychýlení z této polohy. **Stabilitu** podepřeného tělesa určuje práce vykonaná při jeho přemístění ze stálé do vratké rovnovážné polohy.

Při otáčení tělesa kolem nehybné osy je jeho kinetická energie dána vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a ω jeho úhlová rychlost. Moment setrvačnosti vyjadřuje rozložení látky v tělese vzhledem k ose otáčení. Je dán vztahem

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2.$$

Jestliže těleso koná současně posuvný pohyb rychlostí v a otáčivý pohyb úhlovou rychlostí ω, je jeho kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J_0\omega^2.$$

6

Nemá-li se automobil překlopit kolem osy o, jdoucí body dotyku vnějších kol s vozovkou, nesmí být moment setrvačné síly vzhledem k ose o větší než moment tíhové síly vzhledem k téže ose.

Moment tíhové síly vzhledem k ose o má velikost

$$M_1 = F_G\frac{d}{2} = mg\frac{d}{2},$$

moment setrvačné odstředivé síly vzhledem k této ose má velikost

$$M_2 = F_s h = \frac{mv^2}{r}h.$$

Podmínka pro bezpečné projetí zatáčkou je $M_1 \geq M_2$. Při rychlosti $v = v_{max}$ jsou oba momenty stejně velké, $M_1 = M_2$, neboli

$$mg\frac{d}{2} = \frac{mv^2_{max}}{r}h.$$

Odtud velikost maximální rychlosti:

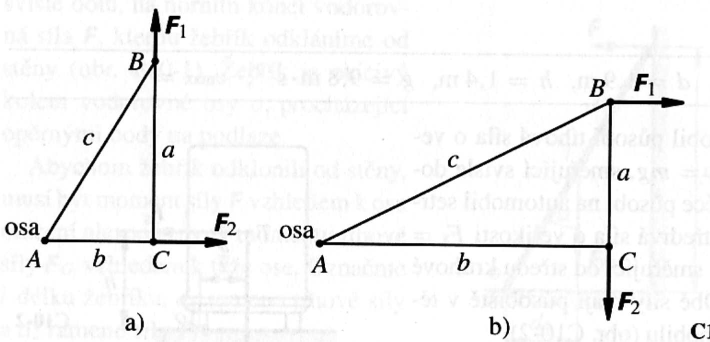
$$v_{max} = \sqrt{\frac{gdr}{2h}}$$

Pro dané hodnoty je $v_{max} \doteq 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Řidič může projet zatáčkou maximální rychlostí $18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, tj. asi $65\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Úlohy

Pokud není uvedeno jinak, dosazujte za $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. První dvě úlohy řešte ve skupinách A a B.



C10-3

Skupina A

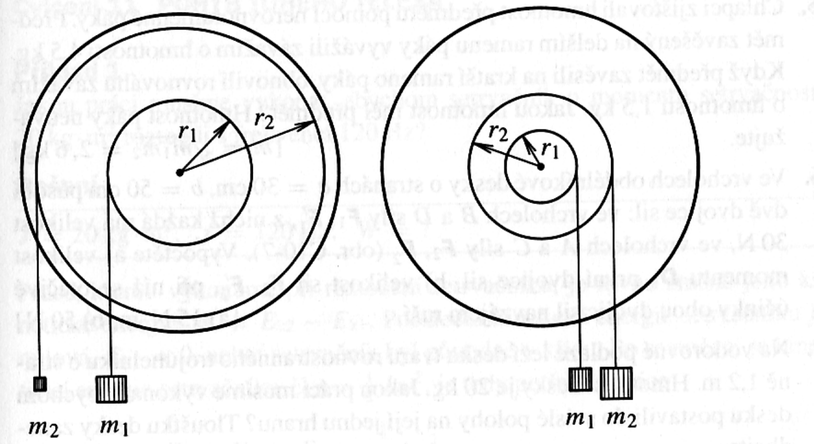
1. Deska tvaru pravoúhlého trojúhelníku o stranách $a = 0{,}5$ m, $b = 0{,}3$ m je otáčivá kolem osy kolmé k desce a jdoucí vrcholem A (obr. C10-3a). Ve vrcholu B působí síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 7 N, ve vrcholu C síla $\boldsymbol{F}_2$ o velikosti 10 N. Obě síly leží v rovině desky. Určete a) velikost momentu síly $\boldsymbol{F}_1$ vzhledem k dané ose, b) velikost momentu síly $\boldsymbol{F}_2$ vzhledem k dané ose, c) velikost výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. [a) $2{,}1\ \mathrm{N \cdot m}$; b) $0\ \mathrm{N \cdot m}$; c) 12 N]

2. Na otáčivém kotouči jsou na téže straně od osy zavěšena závaží o hmotnostech $m_1 = 0{,}5$ kg a $m_2 = 0{,}2$ kg ve vzdálenostech $r_1 = 0{,}2$ m a $r_2 = 0{,}4$ m od osy (obr. C10-4a). V jaké vzdálenosti od osy musíme na druhé straně

Skupina B

1. Deska tvaru pravoúhlého trojúhelníku o stranách $a = 0{,}4$ m, $b = 0{,}8$ m je otáčivá kolem osy kolmé k desce a jdoucí vrcholem A (obr. C10-3b). Ve vrcholech B a C působí síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, které mají stejnou velikost 10 N. Obě síly leží v rovině desky. Určete a) velikost momentu síly $\boldsymbol{F}_1$ vzhledem k dané ose, b) velikost momentu síly $\boldsymbol{F}_2$ vzhledem k dané ose, c) velikost výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. [a) $4\ \mathrm{N \cdot m}$; b) $8\ \mathrm{N \cdot m}$; c) 14 N]

2. Na otáčivém kotouči jsou na téže straně od osy zavěšena závaží o hmotnostech $m_1 = 0{,}4$ kg a $m_2 = 0{,}6$ kg ve vzdálenostech $r_1 = 0{,}1$ m a $r_2 = 0{,}2$ m od osy (obr. C10-4b). Určete hmotnost závaží, které musíme zavěsit na



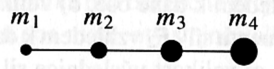
C10-4

zavěsit závaží o hmotnosti $m_3 =$ $= 0{,}6$ kg, aby nastala rovnováha? [0,3 m]

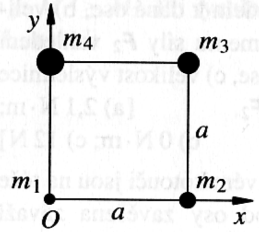
druhé straně ve vzdálenosti $r_3 =$ $= 0{,}4$ m od osy, aby nastala rovnováha. [0,4 kg]

3. Na tenkém tuhém drátě o zanedbatelně malé hmotnosti jsou navlečeny kuličky o hmotnostech $m_1 = 1$ g, $m_2 = 2$ g, $m_3 = 3$ g a $m_4 = 4$ g. Vzájemné vzdálenosti středů kuliček jsou 0,5 m (obr. C10-5). Vypočtěte polohu těžiště této soustavy.

[Těžiště je ve vzdálenosti 1 m od středu první kuličky, je tedy ve středu třetí kuličky]



C10-5



C10-6

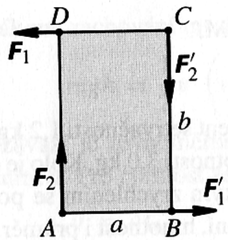
4. Kuličky z předešlé úlohy jsou umístěny ve vrcholech čtverce z tenkého drátu o zanedbatelně malé hmotnosti. Strana čtverce má délku 1 m. Zvolte soustavu souřadnic podle obr. C10-6 a vypočtěte souřadnice těžiště soustavy. [$x_0 = 0{,}5$ m, $y_0 = 0{,}7$ m]

5. Chlapci zjišťovali hmotnost předmětu pomocí nerovnoramenné páky. Předmět zavěšený na delším rameni páky vyvážili závažím o hmotnosti 4,5 kg. Když předmět zavěsili na kratší rameno páky, obnovili rovnováhu závažím o hmotnosti 1,5 kg. Jakou hmotnost měl předmět? Hmotnost páky neuvažujte. [$m = \sqrt{m_1 m_2} = 2{,}6$ kg]

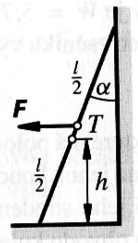
6. Ve vrcholech obdélníkové desky o stranách $a = 30$ cm, $b = 50$ cm působí dvě dvojice sil: ve vrcholech B a D síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_1'$, z nichž každá má velikost 30 N, ve vrcholech A a C síly $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_2'$ (obr. C10-7). Vypočtěte a) velikost momentu $\boldsymbol{D}_1$ první dvojice sil, b) velikost sil $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_2'$, při níž se otáčivé účinky obou dvojic sil navzájem ruší. [a) 15 N·m; b) 50 N]

7. Na vodorovné podlaze leží deska tvaru rovnostranného trojúhelníku o straně 1,2 m. Hmotnost desky je 20 kg. Jakou práci musíme vykonat, abychom desku postavili do svislé polohy na její jednu hranu? Tloušťku desky zanedbejte. [68 J]

8. Na nakloněnou rovinu svírající s vodorovnou rovinou úhel 20° chceme postavit stejnorodý válec o poloměru podstavy 0,12 m. Jaká může být nanejvýš výška válce, aby se nepřeklopil? [$h = 2r/\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}66$ m]



C10-7



C10-8

9. Žebřík o délce 3,0 m a hmotnosti 12 kg je opřen jedním koncem o podlahu, druhým o svislou stěnu, s níž svírá úhel 20° (obr. C10-8). Výška těžiště nad podlahou je 1,2 m (těžiště není uprostřed žebříku). Jak velkou vodorovnou silou, působící v polovině žebříku, odkloníme žebřík horním koncem od stěny? Tření na podlaze je dostatečně velké, aby žebřík neklouzal. [$F \geq \dfrac{2mgh\,\mathrm{tg}\,\alpha}{l\cos\alpha} = 36$ N]

Cvičení 11 POHYB TUHÉHO TĚLESA

Příklad 1

Jakou práci musíme vykonat, abychom setrvačník o momentu setrvačnosti 20 kg·m² roztočili s frekvencí 120 Hz?

Řešení

$J = 20\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, $f = 120$ Hz; $W = ?$

Práce, kterou vykonáme při roztočení setrvačníku, je rovna změně jeho kinetické energie, $W = E_{k2} - E_{k1}$. Počáteční kinetická energie setrvačníku je nulová, $E_{k1} = 0$, neboť setrvačník byl původně v klidu. Po roztočení je kinetická energie setrvačníku $E_{k2} = \frac{1}{2}J\omega^2$, je tedy potřebná práce

$$W = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Dosadíme-li úhlovou rychlost $\omega = 2\pi f$, je práce

$$W = \frac{1}{2} J 4\pi^2 f^2 = 2J\pi^2 f^2.$$

Pro dané hodnoty je $W = 5{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{J} = 5{,}7\ \mathrm{MJ}$.

Při roztočení setrvačníku vykonáme práci 5,7 MJ.

Příklad 2

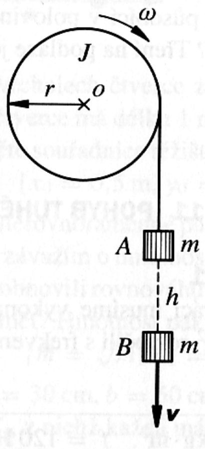
Na obvodu kola, které má poloměr 0,40 m a moment setrvačnosti $1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, je navinuto vlákno, na jehož konci visí závaží o hmotnosti 3,0 kg. Kolo je otáčivé kolem osy jdoucí jeho středem. Vypočtěte, s jakým zrychlením se pohybuje závaží. Vlákno na obvodu kola neprokluzuje. Tření, hmotnost i průměr vlákna neuvažujte.

Řešení

$r = 0{,}40\ \mathrm{m}$, $J = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $m = 3{,}0\ \mathrm{kg}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a = ?$

Úlohu budeme řešit na základě zákona zachování mechanické energie. Na počátku je soustava v klidu. Závaží je v poloze A (obr. C11-1), kinetická energie soustavy je nulová. V čase t od začátku pohybu závaží urazilo dráhu h a je v poloze B. Tíhová potenciální energie soustavy se zmenšila o hodnotu

$$\Delta E_\mathrm{p} = mgh.$$



C11-1

Podle zákona zachování mechanické energie je úbytek tíhové potenciální energie rovný přírůstku kinetické energie. Kinetická energie soustavy v čase t je dána součtem kinetické energie posuvného pohybu závaží a otáčivého pohybu kola. Počáteční kinetická energie je nulová, přírůstek kinetické energie je tedy rovný kinetické energii v čase t, kdy se závaží pohybuje rychlostí v a kolo se otáčí úhlovou rychlostí ω:

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Body na obvodu kola mají stejně velkou rychlost jako závaží, platí tedy $\omega = v/r$ a pro přírůstek kinetické energie dostaneme

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{J}{r^2} \right).$$

Podle zákona zachování mechanické energie platí $\Delta E_\mathrm{p} = \Delta E_\mathrm{k}$, neboli

$$mgh = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{J}{r^2} \right).$$

Pohyb závaží je rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí a se zrychlením a. Pro rychlost závaží v čase t platí vztah

$$v = at,$$

dráha, kterou závaží v tomto čase urazí, je dána vztahem

$$h = \frac{1}{2} a t^2.$$

Po dosazení do vztahu vyjadřujícího zákon zachování mechanické energie a po úpravě dostaneme pro velikost zrychlení závaží vztah

$$a = \frac{mg}{m + \dfrac{J}{r^2}}.$$

Pro dané hodnoty je $a = 2{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Závaží se pohybuje se zrychlením $2{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Úlohy

Pokud není uvedeno jinak, dosazujte za $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. První tři úlohy řešte ve skupinách A a B.

Skupina A

1. Dvě kovové kuličky mají stejnou hmotnost 0,25 kg a jsou spolu spojeny tenkou tyčí o zanedbatelně malé hmotnosti a délce 1,2 m. Vypočtěte moment setrvačnosti této soustavy vzhledem k ose, která je kolmá k tyči a prochází ve vzdálenosti 0,40 m od jedné z kuliček. $[0{,}20\ \mathrm{kg \cdot m^2}]$

Skupina B

1. Dvě kovové kuličky o hmotnostech 0,4 kg a 0,1 kg jsou spolu spojeny tyčí o zanedbatelně malé hmotnosti a délce 0,8 m. Vypočtěte moment setrvačnosti této soustavy vzhledem k ose, která je kolmá k tyči a prochází jejím středem. $[0{,}08\ \mathrm{kg \cdot m^2}]$

2. Kotouč se otáčí kolem osy, vzhledem k níž má moment setrvačnosti $0{,}24\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, s periodou $0{,}80\ \mathrm{s}$. Vypočtěte kinetickou energii kotouče. [7,4 J]

3. Disk o hmotnosti $0{,}32\ \mathrm{kg}$ letí rychlostí $10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a současně rotuje úhlovou rychlostí $60\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ kolem osy, vzhledem k níž má moment setrvačnosti $4{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$. Vypočtěte kinetickou energii disku. [23 J]

2. Setrvačník se otáčí kolem osy, vzhledem k níž má moment setrvačnosti $1{,}6\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, s frekvencí $5\ \mathrm{Hz}$. Vypočtěte kinetickou energii setrvačníku. [790 J]

3. Míč o hmotnosti $0{,}48\ \mathrm{kg}$ letí rychlostí $15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a současně rotuje úhlovou rychlostí $70\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ kolem osy, vzhledem k níž má moment setrvačnosti $2{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$. Vypočtěte kinetickou energii míče. [59 J]

4. Při roztáčení setrvačníku s momentem setrvačnosti $20\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ byla vykonána práce 1 MJ. S jakou frekvencí se setrvačník otáčí? [50 Hz]

5. Setrvačník s momentem setrvačnosti $50\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ se otáčí úhlovou rychlostí $10\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Jakou práci musí vykonat motor pohánějící setrvačník, aby se jeho úhlová rychlost zvětšila na $20\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$? [7,5 kJ]

6. Stejnorodý disk o poloměru $0{,}15\ \mathrm{m}$ a hmotnosti $3{,}2\ \mathrm{kg}$ letí rychlostí $5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a současně se otáčí kolem své rotační osy s periodou $0{,}20\ \mathrm{s}$. Vypočtěte jeho kinetickou energii. [58 J]

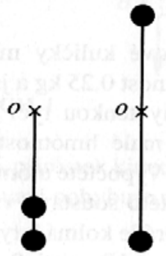
7. Tenkostěnný válec se otáčí kolem své rotační osy s frekvencí 15 Hz. S jakou frekvencí by se musel otáčet plný stejnorodý válec stejných rozměrů a stejné hmotnosti, aby měl stejnou kinetickou energii? [21 Hz]

8. Vypočtěte kinetickou energii tenké obruče o hmotnosti 0,4 kg, která se valí bez prokluzování po rovině rychlostí $10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. [40 J]

9. Dvě závaží o stejných hmotnostech jsou upevněna na tenké tyči o zanedbatelně malé hmotnosti. Tyč je otáčivá kolem vodorovné osy. Vzdálenosti závaží od osy jsou 0,30 m a 0,40 m. Tyč vychýlíme z rovnovážné polohy o 90° a uvolníme. Jakou úhlovou rychlostí prochází tyč rovnovážnou polohou? Závaží jsou umístěna a) na téže straně od osy (obr. C11-2a), b) na opačných stranách od osy (obr. C11-2b). Tření neuvažujte, závaží pokládejte za hmotné body. Řešte pomocí zákona zachování mechanické energie.

$$\left[\text{a) } \omega = \sqrt{\frac{2g(r_1+r_2)}{r_1^2+r_2^2}} = 7{,}4\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\right.$$

$$\left.\text{b) } \omega = \sqrt{\frac{2g(r_2-r_1)}{r_1^2+r_2^2}} = 2{,}8\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\right]$$



a) b) C11-2

Cvičení 12 ARCHIMEDŮV ZÁKON

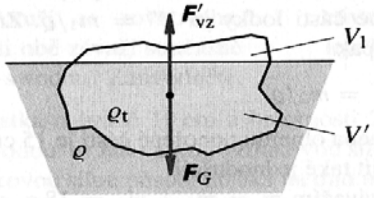
Příklad 1

Na vodní hladině plove ledová kra. Jaká část objemu ledové kry vyčnívá nad volný povrch vody? Hustota ledu je $900\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, hustota vody $1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Řešení

$\varrho_l = 900\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $V_1 = ?$

Označíme-li celkový objem ledové kry V, objem její ponořené části V', pak nad volný povrch vody vyčnívá část o objemu $V_1 = V - V'$ (obr. C12-1).



C12-1

Protože je vztlaková síla $\boldsymbol{F}'_{vz}$ o velikosti $F'_{vz} = \varrho V' g$ v rovnováze s tíhovou silou $\boldsymbol{F}_G$ o velikosti $F_G = \varrho_l V g$, platí

$$F'_{vz} = F_G \quad \text{neboli} \quad \varrho V' g = \varrho_l V g.$$

Odtud objem ponořené části ledové kry je $V' = \varrho_l V/\varrho$ a objem její vyčnívající části

$$V_1 = V - V' = V - \frac{\varrho_l}{\varrho} V = \frac{\varrho - \varrho_l}{\varrho} V.$$

Pro dané hodnoty dostáváme $V_1 = V/10$. Jen jedna desetina objemu ledové kry vyčnívá nad volný povrch vody.