III PROPOSTA

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a quattro domande scelte tra quelle all'interno del questionario. Il candidato elencherà i numeri del problema e dei quesiti scelti nel foglio di bella copia.

Problema 1

È data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3}$$

Il candidato:

a) studi l'andamento della funzione $f(x)$ e tracci il suo grafico;

b) dimostri che, per ogni valore di a numero reale, $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ è esattamente uguale a $2a$;

c) le ascisse dei tre flessi della funzione possono rappresentare, ordinate dalla più piccola alla più grande, i primi 3 termini di una successione aritmetica. Calcoli il 500° termine di tale successione e la somma dei primi 500 termini;

d) scriva eventuali simmetrie della funzione.

Problema 2

È dato l'insieme di funzioni

$$f_{a,b}(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Il candidato:

a) scriva la relazione reciproca tra a e b in modo che la funzione abbia almeno un punto stazionario;

b) calcoli i valori di a e b in modo che la funzione sia tangente alla retta $y = 9x - 9$ nel punto di ascissa $x = 1$;

c) studi l'andamento della funzione trovata e tracci il suo grafico;

d) calcoli l'area della parte di piano delimitata dalla funzione trovata e dalla retta $y = -4$.

Questionario

1) Sia data la funzione $y = \cos(10x)$. Scrivere la derivata cinquantesima della funzione.

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$$

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(5x^2 + 1)}{x^2}$$

4) Trovare due numeri tali che aggiungendo 12 al maggiore si ottiene il doppio della somma di 5 con il minore, e sottraendo 2 dal maggiore si ottiene il triplo della differenza tra il minore e 3.

5) Calcolare la distanza tra i punti di massimo e minimo della funzione $y = x^3 + 6x^2 - 36x - 25$.

6) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $4e^x + 10e^{-x} = 13$

7) Nell'insieme dei numeri complessi risolvere l'equazione $z^4 = -4$. Disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

8) Calcolare le dimensioni degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono $A[2; 5]$, $B[3; -1]$, $C[-4; 1]$.
Calcolare l'area del triangolo.
Scrivere l'equazione vettoriale della retta passante per A e B.

Durata massima della prova: 5 ore effettive (300 minuti).

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione di un vocabolario di italiano.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna del tema.

Problema 1 (33+15+8+4)

a) Nè pari nè dispari

Asintoto $y = 1$

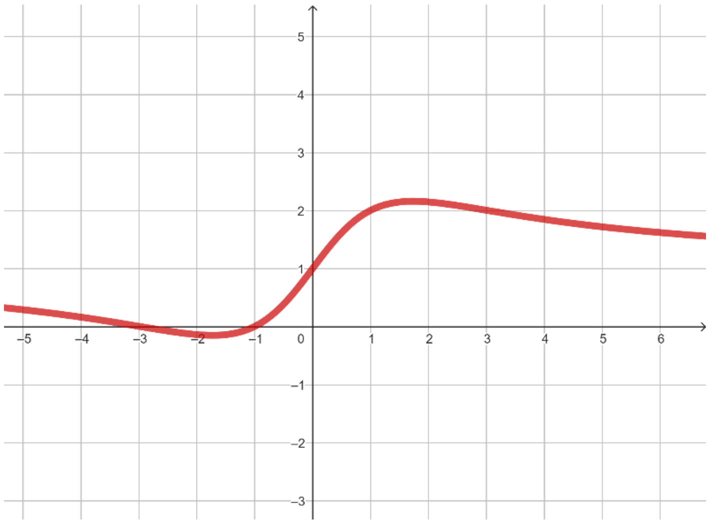
$f' = \frac{-4x^2+12}{(x^2+3)^2}$

$m\left[-\sqrt{3}\,;\ -0.15\right]$

$M\left[\sqrt{3}\,;\ 2.15\right]$

$f'' = \frac{8x^3-72x}{(x^2+3)^3}$

$F_1[0;1] \quad F_2[-3;0] \quad F_3[3;2]$



b) $\int \frac{x^2+4x+3}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{4x}{x^2+3}\right)\,\mathrm{d}x = x + 2\ln|x^2+3| + c$

$|x + 2\ln|x^2+3||_{-a}^{a} = (a + 2\ln(a^2+3)) - (-a + 2\ln(a^2+3) = \boldsymbol{2a}$

c) I tre termini sono $-3; 0; +3$. Il termine 500° è **1494**. La somma è **372 750**.

d) Simmetria rispetto al punto$[0;1]$

Problema 2 (10+10+28+12)

a) $f'_{a,b}(x) = 3x^2 + 2ax + b$ Ha punti stazionari se $\Delta \geq 0$ cioè $4a^2 - 12b \geq 0$

La condizione è $\boldsymbol{a^2 \geq 3b}$

b) $x = 1 \quad y = 0 \quad y' = 9$ $\qquad \begin{cases} 1 + \quad a + b - 4 = 0 \\ 3 + 2a + b \qquad = 9 \end{cases}$

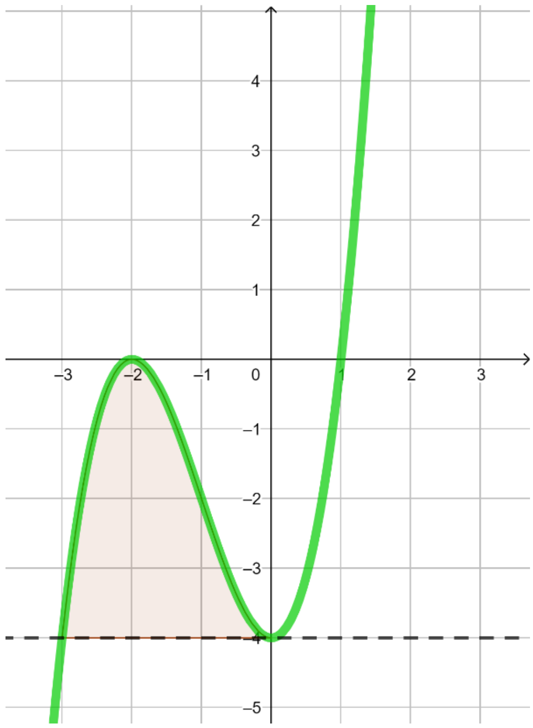
$\boldsymbol{a = 3 \quad b = 0}$

c) $y = x^3 + 3x^2 - 4$ Nessun asintoto

$M[-2;0] \quad m[0;-4]$

$F[-1;-2]$

d) $\int_{-3}^{0}\left((x^3 - 3x^2 - 4) - (-4)\right)\mathrm{d}x = \left|\frac{1}{4}x^4 - x^3\right|_{-3}^{0} = \boldsymbol{\frac{27}{4}}$



Durata massima della prova: 5 ore effettive (300 minuti).

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione di un vocabolario di italiano.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna del tema.

Questionario

1) La cinquantesima derivata è $\mathbf{-10^{50}\cos(10x)}$

2) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,\mathrm{d}x = |x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x|_0^{\pi} = \mathbf{-2\pi}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(5x^2+1)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{10x}{5x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{10x}{5x^2+1}\cdot\frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{5x^2+1} = \mathbf{5}$

4) $\begin{cases} x+12 = 2(5+y) \\ x-\ \ 2 = 3(y-3) \end{cases}$ I due numeri sono $\boldsymbol{x = 8}\quad \boldsymbol{y = 5}$

5) Massimo $[-6;191]$ minimo $[2;-65]$ $\boldsymbol{d} = \sqrt{\mathbf{65600}} = \mathbf{40\sqrt{41}}$

6) Sostituzione $4y + \frac{10}{y} = 13$ Due soluzioni: $y = 2$ e $y = \frac{5}{4}$ $\boldsymbol{x_1 = \ln 2}$ $\boldsymbol{x_2 = \ln\frac{5}{4}}$

7) $\boldsymbol{z_1 = 1 + i}$ $\boldsymbol{z_2 = -1 + i}$ $\boldsymbol{z_3 = -1 - i}$ $\boldsymbol{z_4 = 1 - i}$

8) $a = \sqrt{53}$ $b = \sqrt{52}$ $c = \sqrt{37}$ $A = \mathbf{20}$
$\alpha = \mathbf{65{,}77°}$ $\beta = \mathbf{64{,}59°}$ $\gamma = \mathbf{49{,}64°}$

$A[2;5],\ B[3;-1]$ $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{5}\end{bmatrix} + \boldsymbol{t}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-6}\end{pmatrix}$

Durata massima della prova: 5 ore effettive (300 minuti).
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione di un vocabolario di italiano.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna del tema.