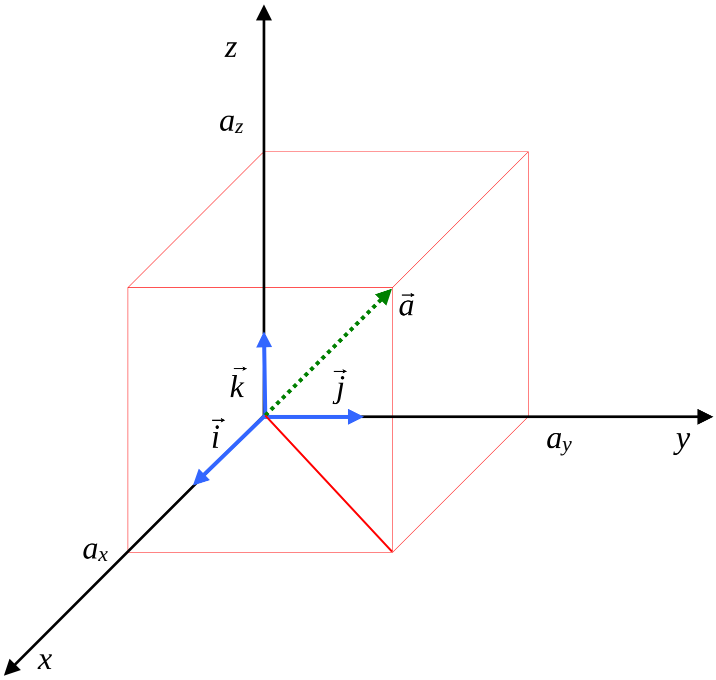
1 PŘEDMĚT FYZIKY FYZIKÁLNÍ VELIČINY MATEMATIKA VE FYZICE

Základní pojmy:

- Předmět studia fyziky, formy hmoty, fyzikální pole, fyzikální veličiny.
- Soustava SI, násobky a díly jednotek.
- Skalární a vektorové veličiny, operace s vektorovými veličinami.
- Diferenciální a integrální počet ve fyzice



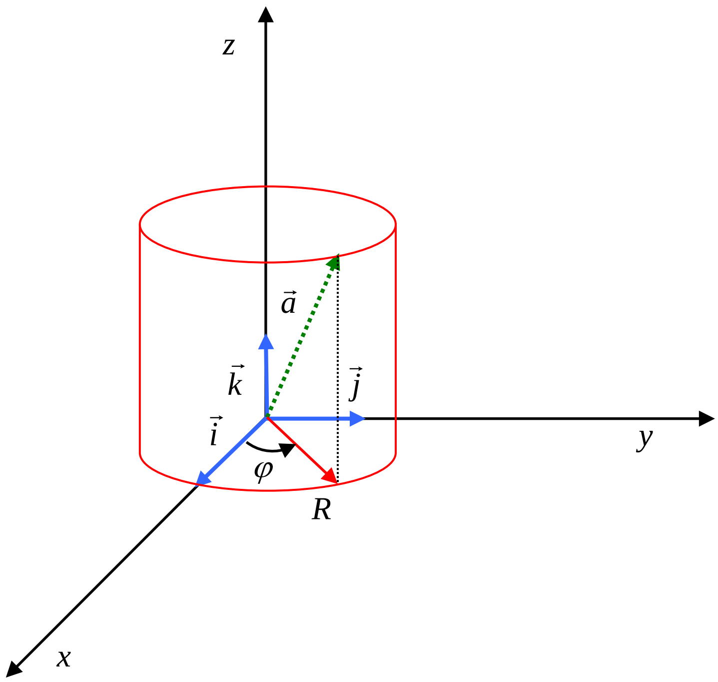
Základní vztahy:

- Kartézská soustava souřadnic *x*, *y*, *z*

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



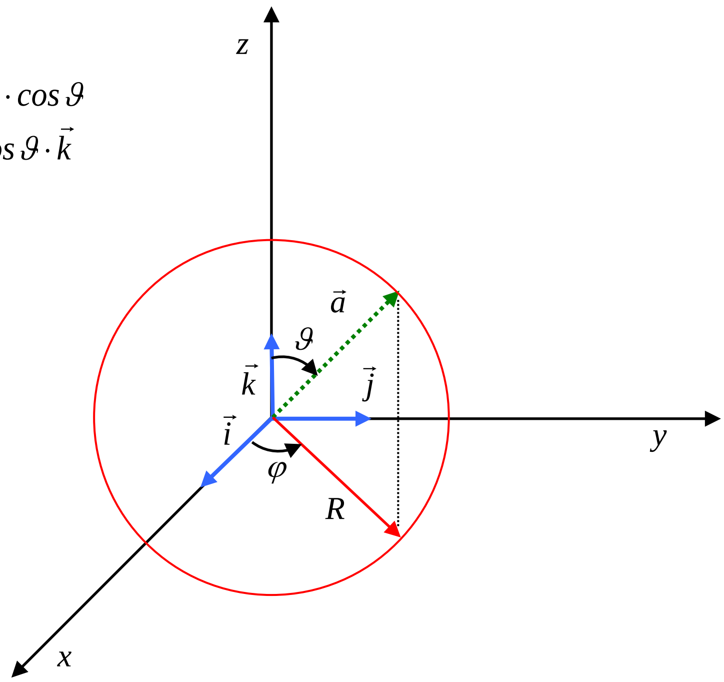
- Válcová soustava souřadnic *R*, *z*, *φ*

$$x = R \cdot \cos\varphi, \quad y = R \cdot \sin\varphi, \quad z = z$$

$$\vec{a} = R \cdot \cos\varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \sin\varphi \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

- Sférická soustava souřadnic *R, φ, θ*

$$x = R \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \quad y = R \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta, \quad z = R \cdot \cos\vartheta$$
$$\vec{a} = R \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \cdot \vec{j} + R \cdot \cos\vartheta \cdot \vec{k}$$

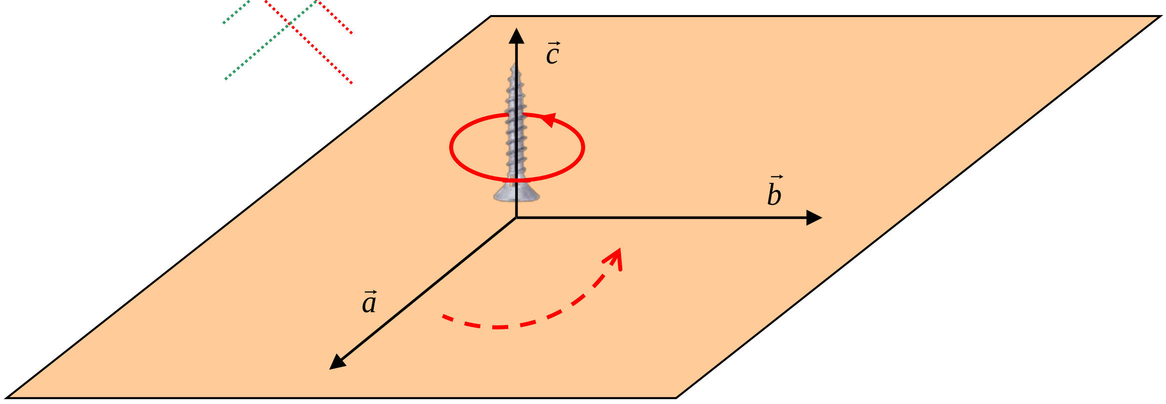


- Vektor v kartézských souřadnicích: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$
  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

- Skalární součin vektorů: $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

- Vektorový součin vektorů: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_y \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \; c = a \cdot b \cdot \sin\alpha, \; \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$

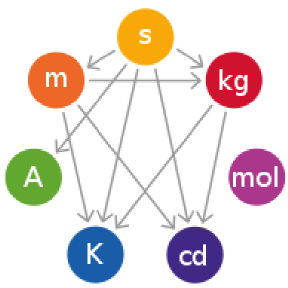
$$\det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z \vec{i} + a_x b_y \vec{k} + a_z b_x \vec{j}\right) - \left(a_y b_x \vec{k} + a_z b_y \vec{i} + a_x b_z \vec{j}\right)$$



Soustava SI – základní jednotky a veličiny

Fyzikální veličina	Značka fyzikální veličiny	Název jednotky SI	Značka jednotky SI	Definice jednotky SI
Elektrický proud	*I, i*	ampér	A	Ampér je definován fixací číselné hodnoty elementárního náboje, aby byla rovna $1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$, je-li vyjádřena jednotkou C, rovnou A s, kde sekunda je definována pomocí $\Delta\nu$Cs.
Svítivost	*I*	kandela	cd	Kandela je definována fixací číselné hodnoty světelné účinnosti monochromatického záření o frekvenci $540 \cdot 10^{12}$ Hz, K_{cd}, aby byla rovna 683, je-li vyjádřena jednotkou lm W^{-1}, rovnou cd sr W^{-1}, nebo cd sr $kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{3}$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí *h*, *c* a $\Delta\nu$Cs.
Délka	*l, s*	metr	m	Metr je definován fixací číselné hodnoty rychlosti světla ve vakuu *c*, aby byla rovna 299 792 458, je-li vyjádřena jednotkou m s^{-1}, kde sekunda je definována pomocí cesiové frekvence $\Delta\nu$Cs.
Hmotnost	*m*	kilogram	kg	Kilogram je definován fixací číselné hodnoty Planckovy konstanty *h*, aby byla rovna $6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$, je-li vyjádřena jednotkou J s, rovnou kg $m^2\ s^{-1}$, kde metr a sekunda jsou definovány pomocí c a $\Delta\nu$Cs.
Látkové množství	*n*	mol	mol	Mol je definován fixací číselné hodnoty Avogadrovy konstanty, aby byla rovna $6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$, je-li vyjádřena jednotkou mol^{-1}.
Termodynamická teplota	*T*	kelvin	K	Kelvin je definován fixací číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty, aby byla rovna $1{,}380\ 649 \cdot 10^{-23}$, je-li vyjádřena jednotkou J K^{-1}, rovnou kg $m^2 s^{-2}\ K^{-1}$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí h, c a $\Delta\nu$Cs.
Čas	*t*	sekunda	s	Sekunda je definována fixací číselné hodnoty cesiové frekvence $\Delta\nu$Cs, tedy frekvence přechodu mezi hladinami velmi jemného rozštěpení neporušeného základního stavu atomu cesia 133, aby byla rovna 9 192 631 770, je-li vyjádřena jednotkou Hz, rovnou s^{-1}.

Vzájemný vztah mezi základními jednotkami



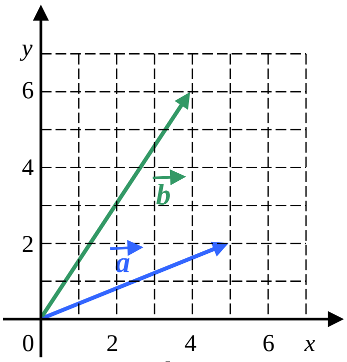
Početní úlohy:

1. Vyjádřete vektory $\vec{a}, \vec{b}$ (*obr.1*) v kartézské souřadné soustavě. Určete součet vektorů $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ a rozdíly vektorů $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$.

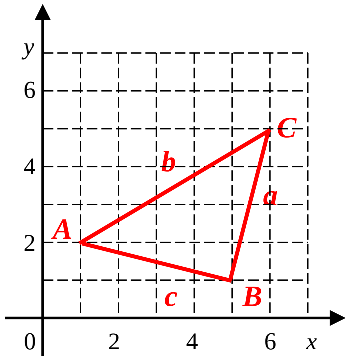
   [$\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j}; \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j}; \vec{c} = 9\vec{i} + 8\vec{j}; d = \vec{i} - 4\vec{j}; \vec{e} = -\vec{i} + 4\vec{j}$]

2. Určete vektory polohy středů stran trojúhelníku *ABC* (*obr. 2*).

   [$\vec{a} = 5{,}5\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{b} = 3{,}5\vec{i} + 3{,}5\vec{j}; \vec{c} = 3\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$]



Obr. 1



Obr. 2

3. Určete skalární součin c a vektorový součin $\vec{d}$ vektorů $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

   [$c = 10; \vec{d} = 22\vec{i} - 4\vec{j} - 10\vec{k}; d = 24{,}5$]

4. Určete úhel vektorů $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

   [26,9°]

5. Určete velikost práce vykonané silou $\vec{F} = (5\,\mathrm{N})\vec{i} + (2\,\mathrm{N})\vec{k}$, která přemístí těleso na úseku dráhy $\Delta\vec{s} = (20\,\mathrm{m})\vec{i} + (10\,\mathrm{m})\vec{k}$.

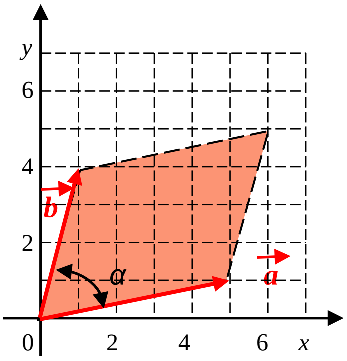
   [120 J]

6. Určete velikost plochy rovnoběžníku na *obr. 3* a úhel α vektorů $\vec{a}, \vec{b}$.

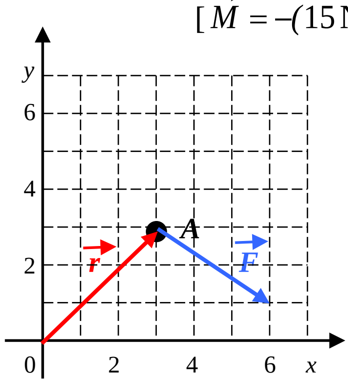
   [S = 19; α = 64,6°]

7. Určete velikost momentu síly $\vec{M}$, která působí v bodě A vzhledem k počátku systému (*obr. 4*).

   [$\vec{M} = -(15\,\mathrm{Nm})\vec{k}; M = 15\,\mathrm{Nm}$]



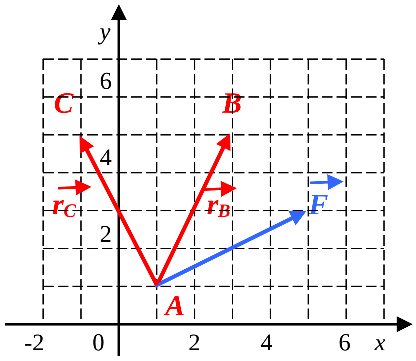
Obr. 3



Obr. 4

8. Určete velikost mechanické práce vykonané během přemístění tělesa z bodu A do bodu B a z bodu A do bodu C (*obr. 5*) v důsledku působení konstantní síly $\vec{F}$.

[W_{AB} = 16 J; W_{AC} = 0]



Obr. 5

9. Určete velikost výsledné síly působící na hmotný bod, na který působí síla $\vec{F}_1$ (F_1 = 9 N) a síla $\vec{F}_2$ (F_2 = 6 N). Vektor síly $\vec{F}_1$ svírá se silou $\vec{F}_2$ úhel *60°*.

[F_R = 13 N]

Základní pravidla diferenciálního počtu

Konstanta	$\boldsymbol{y = k}$ $y = 10$	$\boldsymbol{y' = 0}$ $y' = 0$
Součin konstanty a funkce	$\boldsymbol{y = c \cdot f(x)}$ $y = 10 \cdot x^3$ $y = 5 \cdot \sin x$	$\boldsymbol{y' = c \cdot f'(x)}$ $y' = 30 \cdot x^2$ $y' = 5 \cdot \cos x$
Součet a rozdíl dvou funkcí	$\boldsymbol{y = c_1 \cdot f(x) \pm c_2 \cdot g(x)}$ $y = 4 \cdot \cos x + 2 \cdot x^2$ $y = 10 - 5 \cdot x^4$	$\boldsymbol{y' = c_1 \cdot f'(x) \pm c_2 \cdot g'(x)}$ $y' = -4 \cdot \sin x + 4 \cdot x$ $y' = -20 \cdot x^3$
Součin dvou funkcí	$\boldsymbol{y = f(x) \cdot g(x)}$ $y = x^3 \cdot \sin x$ $y = 10 \cdot x \cdot \cos x$	$\boldsymbol{y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$ $y' = 3 \cdot x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$ $y' = 10 \cdot \cos x - 10 \cdot x \cdot \sin x$
Podíl dvou funkcí	$\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)}}$ $y = \frac{4 \cdot x^2}{\sin x}$	$\boldsymbol{y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$ $y' = \frac{8 \cdot x \cdot \sin x - 4 \cdot x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$
Složená funkce	$\boldsymbol{y = f(g(x))}$ $y = (5 - x)^2$ $y = 2 \cdot \sin(5 \cdot x)$	$\boldsymbol{y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ $y' = -2 \cdot (5 - x)$ $y' = 10 \cdot \cos(5 \cdot x)$
Derivace vybraných funkcí	$\boldsymbol{y = x^n}$	$\boldsymbol{y' = nx^{n-1}}$
	$\boldsymbol{y = \sin x}$	$\boldsymbol{y' = \cos x}$
	$\boldsymbol{y = \cos x}$	$\boldsymbol{y' = -\sin x}$
	$\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$	$\boldsymbol{y' = \frac{1}{\cos^2 x}}$
	$\boldsymbol{y = \mathrm{cotg}\, x}$	$\boldsymbol{y' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$
	$\boldsymbol{y = e^x}$	$\boldsymbol{y' = e^x}$
	$\boldsymbol{y = a^x}$	$\boldsymbol{y' = a^x \ln a}$
	$\boldsymbol{y = \ln x}$	$\boldsymbol{y' = \frac{1}{x}}$
	$\boldsymbol{y = \log_a x}$	$\boldsymbol{y' = \frac{1}{x \ln a}}$

<u>Početní úlohy:</u>

1. Vypočtěte derivace:

a) $y = 2 + x - x^2$

b) $y = (x-2)(x-3)$

c) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

d) $y = sin(3x+5)$

e) $y = ln\,\mathrm{tg}\,x$

f) $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

g) $y = \dfrac{1}{ln\,x}$

2. Určete rychlost a zrychlení hmotného bodu v závislosti na čase na základě znalosti dráhy hmotného bodu jako funkce času:

a) $s(t) = 4t^2 + 5t + 10$

[$v(t) = 8t + 5;\ a(t) = 8$]

b) $h(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$

[$v(t) = gt;\ a(t) = g$]

c) $h(t) = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$

[$v(t) = v_0 - gt;\ a(t) = -g$]

3. Určete rychlost a zrychlení harmonického pohybu hmotného bodu při znalosti rovnice pro okamžitou výchylku hmotného bodu:

a) $y(t) = y_m\ sin\,\omega t$

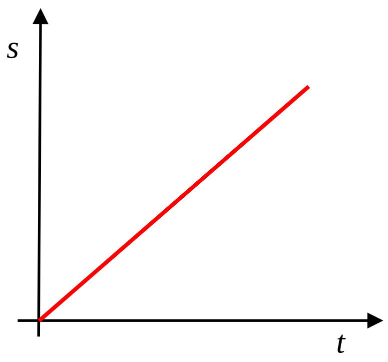
[$v(t) = \omega y_m\ cos\,\omega t;\ a(t) = -\omega^2 y_m\ sin\,\omega t$]

b) $y(t) = 0{,}2\ sin\,10\pi t$

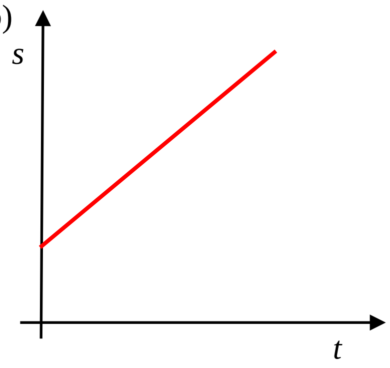
[$v(t) = 2\pi\ cos 10\pi t;\ a(t) = -20\pi^2\ sin 10\pi t$]

4. Určete graficky časový průběh rychlosti a zrychlení pohybů, pro které jsou uvedeny grafy závislosti dráhy na čase:

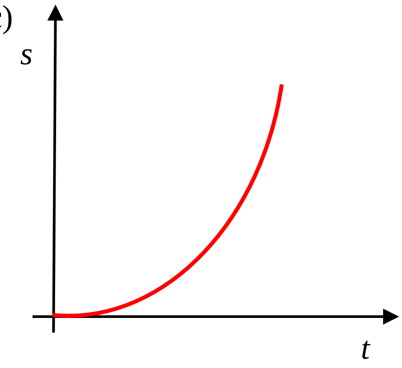
a)



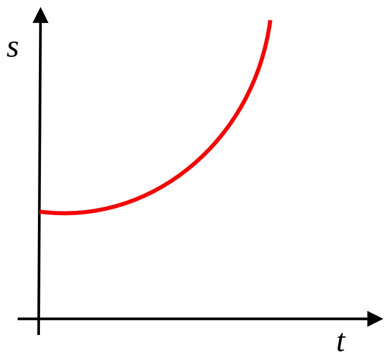
b)



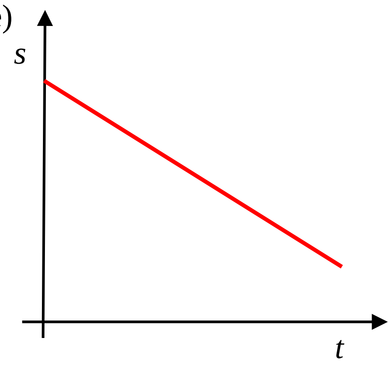
c)



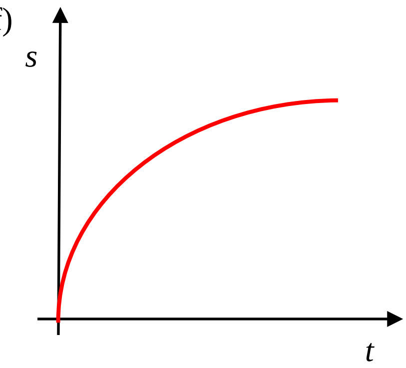
d)



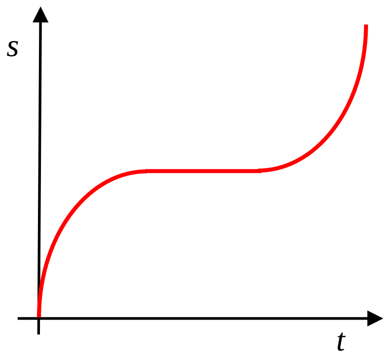
e)



f)



g)



Základní pravidla integrálního počtu

Definice	$\boldsymbol{F'(x) = f(x) \Rightarrow}$ $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow$	$\boldsymbol{\int f(x)dx = F(x) + k}$ $\int \cos x\ dx = \sin x + k$
Součin konstanty a funkce	$\boldsymbol{y = a\ f(x)}$ $y = 5 \cdot x$	$\boldsymbol{\int a\ f(x)dx = a\int f(x)dx = a\,F(x) + k}$ $\int 5 \cdot x\ dx = 5 \cdot \int x\ dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2} + k$
Součet a rozdíl dvou funkcí	$\boldsymbol{y = a\ f(x) \pm b\,g(x)}$ $y = 2 \cdot \cos x \pm 5 \cdot e^x$	$\boldsymbol{\int [a\ f(x) \pm b\,g(x)]dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx = a\,F(x) + b\,G(x) + k}$ $\int [2 \cdot \cos x \pm 5 \cdot e^x]dx = 2 \cdot \int \cos x\ dx \pm 5 \cdot \int e^x\ dx = 2 \cdot \sin x \pm 5 \cdot e^x + k$
Integrace vybraných funkcí	$\boldsymbol{y = k}$	$\boldsymbol{\int a\ dx = a\,x + k}$
	$\boldsymbol{y = x^n}$	$\boldsymbol{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k}$
	$\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{\int \frac{dx}{x} = \ln x + k}$
	$\boldsymbol{y = \cos x}$	$\boldsymbol{\int \cos x\ dx = \sin x + k}$
	$\boldsymbol{y = \sin x}$	$\boldsymbol{\int \sin x\ dx = -\cos x + k}$
	$\boldsymbol{y = e^x}$	$\boldsymbol{\int e^x dx = e^x + k}$
	$\boldsymbol{y = a^x}$	$\boldsymbol{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}}$
Definice určitého integrálu	$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$	

Početní úlohy:

1. Vypočtěte neurčitý a určitý integrál:

a) $\int (x^5 - 4x^3)\, dx$

b) $\int (\frac{1-x^2}{x})\, dx$

c) $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \sin \omega t\, dt$

e) $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

2. Určete rovnici rychlosti a dráhy jako funkce času pohybu hmotného bodu pro dané závislosti zrychlení pohybu v závislosti na čase:

a) $a(t) = 0$

$[v(t) = v_0 ;\ s(t) = v_0 t]$

b) $a(t) = 5$

$[v(t) = v_0 + 5t;\ s(t) = s_0 + v_0 t + 2{,}5t^2]$

c) $a(t) = -g$

$[v(t) = v_0 - gt;\ h(t) = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} gt^2]$

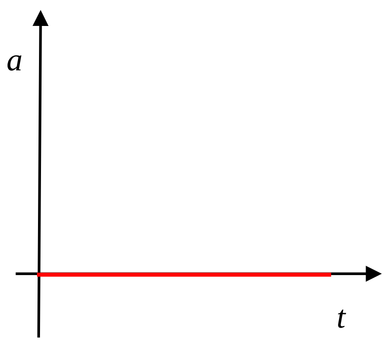
3. Určete velikost elektrického náboje, který projde vodičem v čase 5 s jestliže intenzita elektrického proudu roste v čase lineárně z nuly na hodnotu 10 mA.

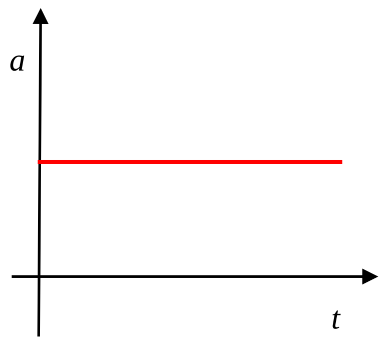
[0,025 C]

4. Určete velikost práce, kterou je nutno vynaložit na deformaci pružiny při jejím prodloužení o 20 cm. Konstanta pružnosti pružiny je k = 100 N/m.

[4 J]

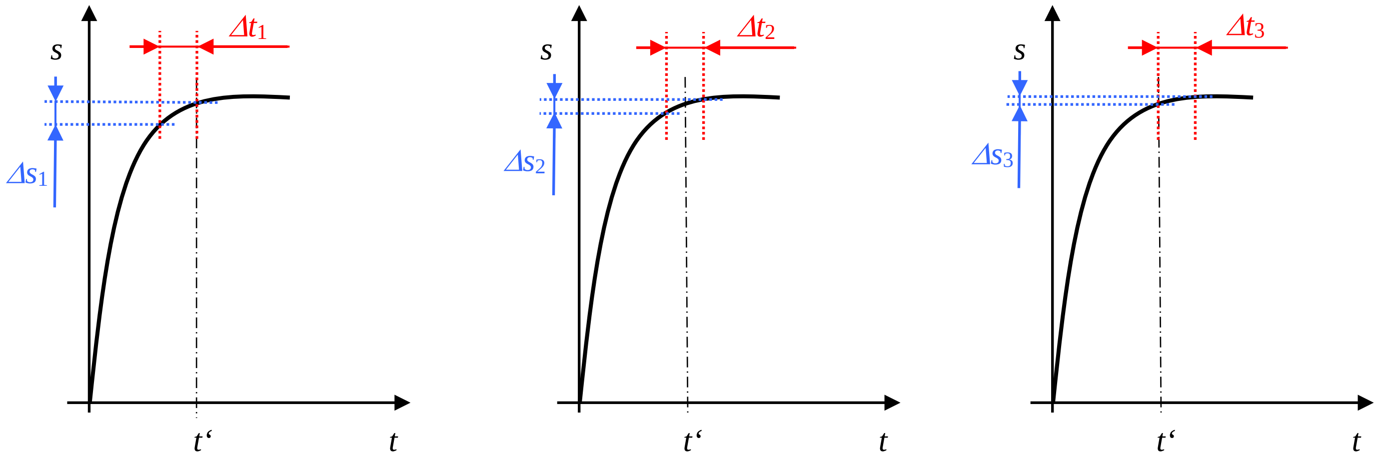
5. Určete graficky časový průběh rychlosti a dráhy pohybu hmotného bodu pro uvedené časové průběhy zrychlení pohybu hmotného bodu:

a)


b)


POJEM A GRAFICKÁ INTERPRETACE DERIVACE

Jaká je velikost okamžité rychlosti v čase *t* = *t*‘?



$v_1 = \dfrac{\Delta s_1}{\Delta t_1}$ $\qquad$ $v_2 = \dfrac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$ $\qquad$ $v_3 = \dfrac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$$

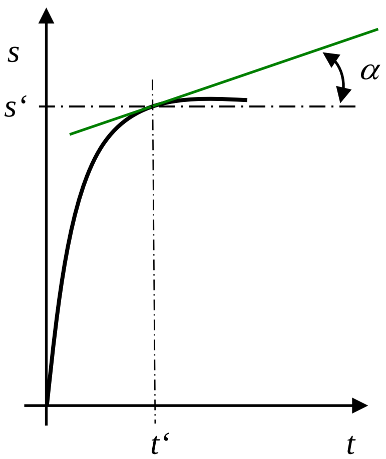
$$\Delta s_1 > \Delta s_2 > \Delta s_3$$

$$\underbrace{v_1 > v_2 > v_3}$$

?

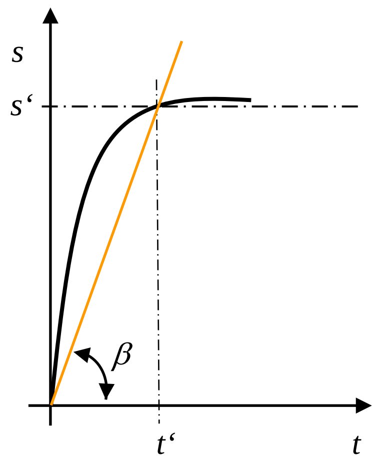
$$\underbrace{}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t')}{\Delta t} = \frac{ds(t')}{dt} = s'(t') = \dot{s}(t')$$



$tg\alpha = v = \dfrac{ds(t')}{dt} = s'(t')$

okamžitá rychlost v čase *t*‘



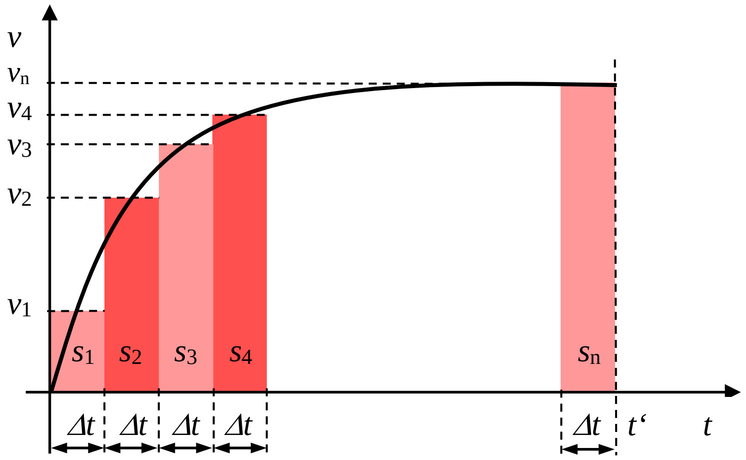
$tg\beta = v_m = \dfrac{s(t')}{t'}$

průměrná rychlost v čase *t*‘

POJEM A GRAFICKÁ INTERPRETACE INTEGRACE

Jaká je velikost dráhy ujeté v intervalu času Δt ?

$$v \approx \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s(t) \approx v \cdot \Delta t$$



Jaká je velikost dráhy ujeté v čase *t'* ?

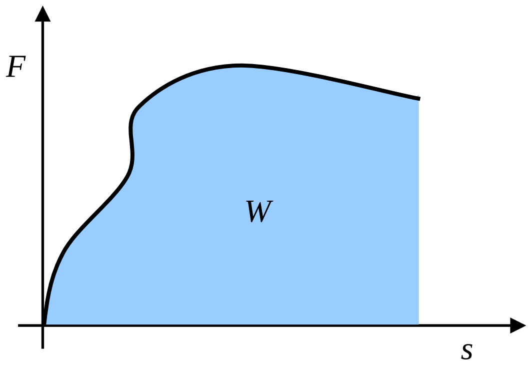
$$s(t') \approx v_1 \cdot \Delta t + v_2 \cdot \Delta t + v_3 \cdot \Delta t + v_4 \cdot \Delta t + ...v_n \cdot \Delta t = \sum_1^n v_i \cdot \Delta t$$

Přesně:

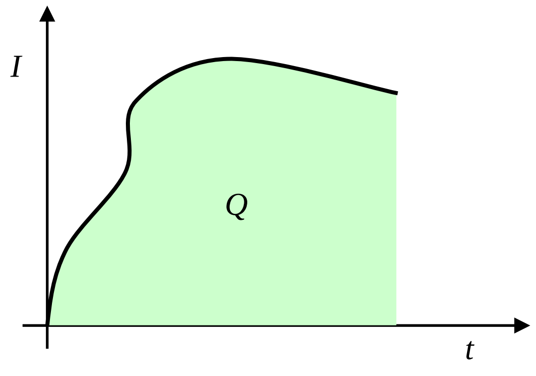
$$v = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow ds(t) = v \cdot dt$$

$$s(t') = v_1 \cdot dt + v_2 \cdot dt + v_3 \cdot dt + v_4 \cdot dt + ...v_\infty \cdot dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_1^\infty v_i \cdot \Delta t = \int_0^{t'} v(t) \cdot dt$$

Jiné příklady použití integrálního počtu:



$$W = \int F(s) \cdot ds$$



$$Q = \int I(t) \cdot dt$$