

## 2

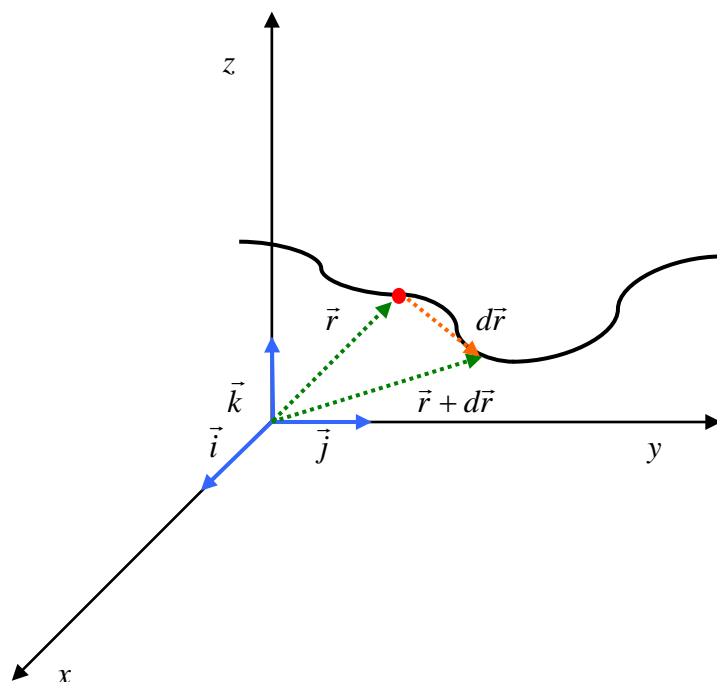
## KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

### Základní pojmy:

- Pojem kinematiky. Hmotný bod. Vztažná soustava. Trajektorie pohybu.
- Veličiny v kinematice – dráha, průměrná a okamžitá rychlost, tečná a úhlová rychlost, normálové a tečné zrychlení, úhlové zrychlení.
- Grafické vyjádření pohybů  $v-t$ ,  $a-t$ ,  $s-t$ .
- Přímočarý pohyb – pohyb rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený, volný pád, svislý vrh.
- Křivočarý pohyb – rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici. Perioda a kmitočet.
- Složený pohyb – Galileův princip. Vodorovný vrh, šikmý vrh vzhůru.

### Základní vztahy:

#### *Obecný pohyb:*



- Polohový vektor:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

- Velikost polohového vektoru:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Elementární vektorový přírůstek dráhy:

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

- Velikost elementárního přírůstku dráhy:

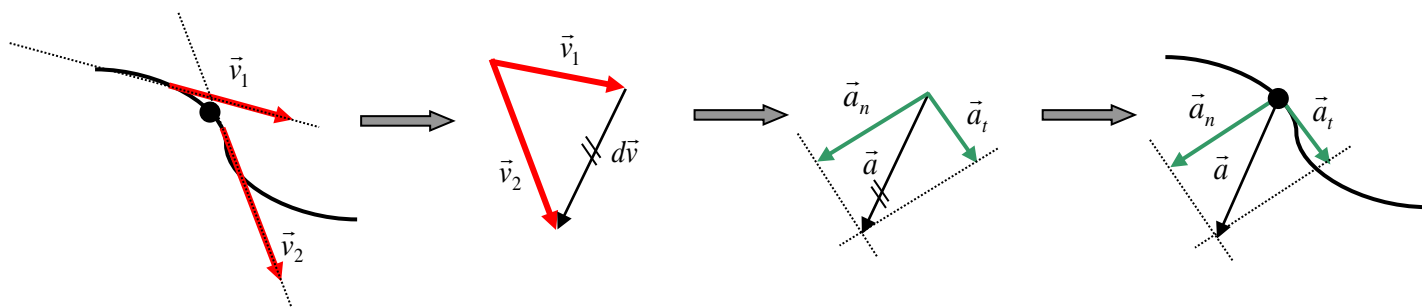
$$ds = |d\vec{r}| = dr = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

- Okamžitá rychlost:
- Zrychlení:
- Rozklad zrychlení na složky:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

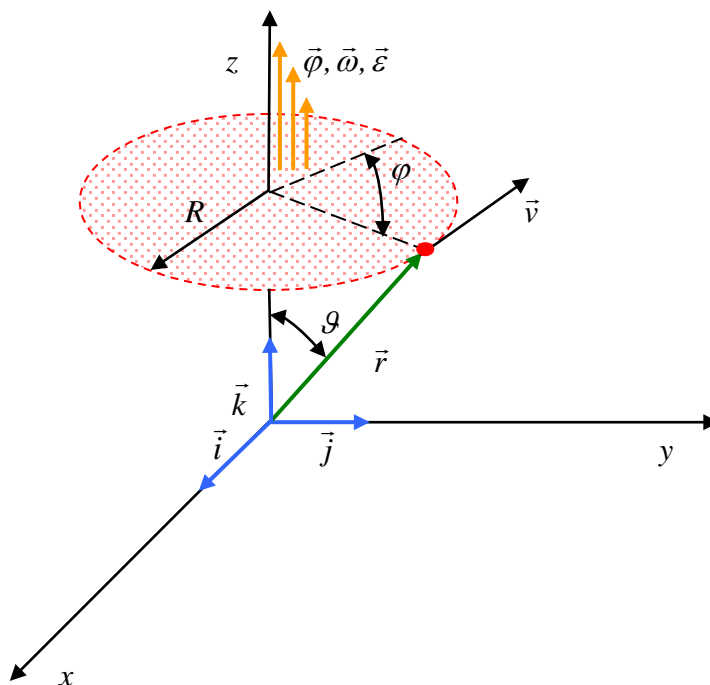
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



**Poznámka:** Z názvu zrychlení nelze usuzovat, že vyjadřuje pouze číselnou změnu velikosti rychlosti! Zrychlení charakterizuje každou změnu rychlosti – tedy jak velikosti rychlosti (zrychlení tečné) tak i směru rychlosti (zrychlení normálové).

### Obecný pohyb po kružnici:



- Úhlová rychlost otáčení:
- Úhlové zrychlení:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- Úhlová a obvodová rychlost:

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot r \cdot \sin \vartheta, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Tečné zrychlení a úhlové zrychlení:

$$a_t = R \cdot \varepsilon, \quad \vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

- Normálové zrychlení:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

### **Přímočarý rovnoměrný pohyb:**

- Dráha
- Rychlost

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

### **Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb:**

- Dráha
- Okamžitá rychlost

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

### **Volný pád:**

- Dráha
- Okamžitá rychlost
- Rychlost dopadu z výšky  $h$

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v = g \cdot t$$

$$v = \sqrt{2g \cdot h}$$

### **Svislý vrh vzhůru:**

- Okamžitá výška
- Výška vrhu
- Doba výstupu
- Okamžitá rychlost

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

$$v = v_0 - g \cdot t$$

### **Vodorovný vrh:**

- Poloha hmotného bodu
- Okamžitá rychlost
- Délka vrhu
- Doba pohybu

$$x = v_0 \cdot t; \quad y = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v_x = v_0; \quad v_y = g \cdot t; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{2v_0^2 \cdot h}{g}}$$

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

**Rovnoměrný pohyb po kružnici (kružnice o poloměru R):**

- Úhlová dráha  $\varphi = \frac{s}{R} = \omega \cdot t$
- Tečná (dráhová) rychlost  $v_t = \frac{s}{t} = \omega \cdot R = 2\pi \cdot f \cdot R$
- Úhlová rychlost  $\omega = \frac{\varphi}{t} = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$
- Kmitočet a perioda  $f = \frac{1}{T}; T = \frac{1}{f}$
- Dostředivé zrychlení  $a_d = \omega^2 \cdot R = \frac{v_t^2}{R}$

**Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici (kružnice o poloměru R):**

- Úhlová dráha  $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$
- Úhlová rychlost  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$

**Srovnání vztahů pro translační (přímočarý) a rotační pohyb (pohyb po kružnici):**

$s = v_0 \cdot t$	$\Rightarrow$	$\varphi = \omega_0 \cdot t$
$s = s_0 + v_0 \cdot t$	$\Rightarrow$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t$
$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$	$\Rightarrow$	$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$
$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$	$\Rightarrow$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$
$v = v_0 + a \cdot t$	$\Rightarrow$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$

**Příklady na procvičení:**

1. Těleso se pohybuje po trajektorii dané rovnicí  $y(t) = t^2 - 40t$ . Určete velikost rychlosti v závislosti na čase, největší vzdálenost tělesa od počátku souřadného systému a velikost rychlosti v okamžiku průchodu tělesa polohou  $y = 0$ .

$$[v(t) = 2t - 40; -400 \text{ m}; 40 \text{ m/s}]$$

2. Během startu ujede letadlo na startovní dráze dráhu délky 5 km za dobu 100 s. Určete rychlost letadla v okamžiku vzletu a zrychlení letadla.

$$[360 \text{ km/h}; 1 \text{ m/s}^2]$$

3. Polohový vektor hmotného bodu v pohybu je dán rovnicí  $\vec{r} = 10t^2 \vec{i} + 5t \vec{j} - 5t \vec{k}$  [m]. Určete rychlost jako funkci času a velikost rychlosti v čase  $t = 2$  s.

$$[\vec{v} = 20t \vec{i} + 5 \vec{j} - 5 \vec{k}; 40,6 \text{ m/s}]$$

4. Cyklista šlape rychlostí 36 km/h. Během posledních 4 s závěrečného finišu zvyšuje svoji rychlost na 50,4 km/h. Určete průměrné zrychlení cyklisty a dráhu projetou během posledních 4 s.

$$[1 \text{ m/s}^2; 48 \text{ m}]$$



Obr. 1

5. Automobil vyjíždí s konstantním zrychlením  $2 \text{ m/s}^2$ . Určete dráhu automobilu v okamžiku, kdy dosáhne rychlosti 32 m/s.

$$[256 \text{ m}]$$

6. Těleso volně padá z výšky 600 m. Určete, po jaké době dopadne na zem a jaká je rychlost dopadu.

$$[11,1 \text{ s}; 109 \text{ m/s}]$$

7. Projektil je vystřelen svisle vzhůru s počáteční rychlostí 392 m/s. Určete nejvyšší dosaženou výšku a dobu výstupu při zanedbání odporu vzduchu.

$$[7840 \text{ m}; 40 \text{ s}]$$

8. Těleso se pohybuje po kružnici o poloměru 10 cm s obvodovou rychlostí 3 m/s. Určete velikost dostředivého zrychlení a kmitočet pohybu.

$$[90 \text{ m/s}^2; 4,8 \text{ Hz}]$$

9. Hmotný bod se pohybuje podél kružnice o poloměru 20 cm s kmitočtem 5 Hz. Určete obvodovou rychlost a počet otáček vykonaných hmotným bodem za dobu 20 s.

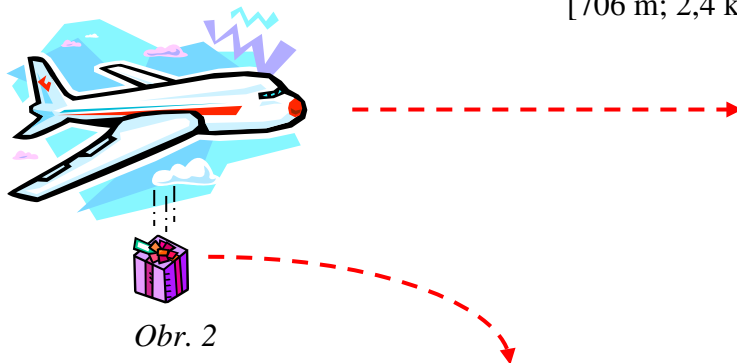
$$[6,3 \text{ m/s}; 100 \text{ otáček}]$$

10. Plavec překonává řeku rychlostí 3 m/s kolmo na směr proudu řeky. Určete rychlost proudu řeky a výslednou rychlost plavce, jestliže dráha plavce směrem k pozorovateli na břehu svírá úhel  $30^\circ$  se směrem kolmým na břeh.

$$[1,7 \text{ m/s}; 3,5 \text{ m/s}]$$

11. Balík je uvolněn za letu z letadla, které se pohybuje vodorovně rychlostí 200 m/s a dopadne na zem za dobu 12 s. Určete výšku letadla, dráhu balíku ve vodorovném směru a rychlost dopadu balíku. Odpor vzduchu je zanedbatelný.

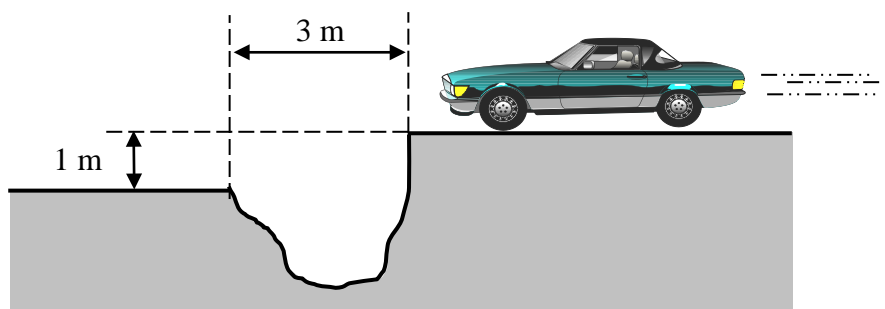
[706 m; 2,4 km; 232 m/s]



Obr. 2

12. Motorista, který se pohybuje rychlostí 54 km/h, přijede nečekaně k propadlé vozovce v délce 3 m s úrovnovým rozdílem 1 m. Určete, zda se řidiči podaří překážku překonat (obr. 3).

[překoná]



Obr. 3

13. Projektil je vystřelen ve vodorovném směru ve výšce 49 m a dopadne na zem ve vodorovné vzdálenosti 2 km od místa výstřelu. Určete rychlost výstřelu projektilu.

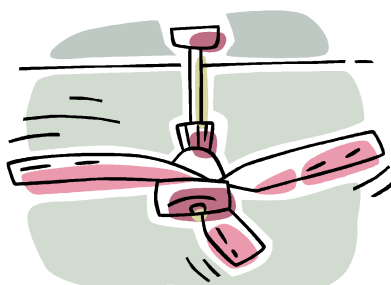
[632 m/s]

14. Rotor elektromotoru se po vypnutí motoru zastaví po 15 s, přičemž vykonal ještě 54 otáček. Určete počáteční frekvenci rotoru a minutový počet otáček, úhlové zrychlení a tečné zrychlení na obvodu rotoru, je-li poloměr rotoru 12 cm, počáteční úhlovou rychlost a počáteční obvodovou rychlost rotoru.

[7,2 Hz; 432 ot/min; 3 rad/s<sup>2</sup>; 0,36 m/s<sup>2</sup>; 45,2 rad/s; 5,4 m/s]

15. Ventilátor rotující pětkrát za sekundu se po vypnutí proudu zastaví za 5 s. Určete úhlové zrychlení a počet otáček do okamžiku zastavení ventilátoru (obr.4).

[ $2\pi$  rad/s<sup>2</sup>; 12,5 otáček]



Obr.4