

**Dispensa di Matematica per la classe 4. C**

**EQUAZIONI ESPONENZIALI E  
LOGARITMICHE**

**GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA**

**NUMERI COMPLESSI**

**CALCOLO COMBINATORIO,  
PROBABILITÀ E STATISTICA**

*Nome e Cognome:*



## INTRODUZIONE

Il programma di matematica degli **ultimi tre anni** lentamente prepara gli studenti all'esame di **maturità**.

L'esame di maturità è formato da **due parti**:

- la prima parte vale **60 punti**, sono 2 problemi, lo studente ne sceglie 1, c'è sempre lo studio di funzione (30-35 punti) e l'integrale.
- la seconda parte vale **40 punti**, sono 8 domande, lo studente ne sceglie 4, ogni domanda 10 punti.

Gli argomenti delle domande sono 20:

<b>IV ANNO</b>	1. Equazioni o disequazioni esponenziali
	2. Equazioni o disequazioni logaritmiche
	3. Trigonometria (teorema dei seni o del coseno)
	4. Equazioni o disequazioni goniometriche
	5. Calcolo combinatorio (ed equazioni con $n!$ )
	6. Probabilità
	7. Statistica
	8. Numeri complessi
<b>V ANNO</b>	9. Punti, vettori e rette in 2D
	10. Punti, vettori, rette e piani in 3D
	11. Coniche (circonferenza, ellissi, iperbole, parabola)
	12. Successioni e serie
	13. Limiti
	14. Rette tangenti
	15. Derivate
	16. Studio delle funzioni
<b>VI ANNO</b>	17. Funzioni ed equazioni parametriche
	18. Integrali
	19. Rotazione delle funzioni nello spazio
	20. Varie (ripasso, logica, esercizi di ragionamento)

Per superare l'esame di maturità sono necessari **35 punti su 100**.

I temi d'esame vengono preparati dal professore e inviati a Roma, dove vengono accettati o cambiati. Questo significa che il professore può influenzare la preparazione del test, ma non totalmente.

**FUNZIONI  $y = f(x)$**   
(cioè  $y$  è funzione di  $x$ , dipende da  $x$ )

**FUNZIONE  $y = f(x)$**  è un legame tra  $x$  e  $y$ : se do un valore a  $x$  allora posso calcolare il valore di  $y$

**VARIABILE INDIPENDENTE  $x$**  è una lettera a cui possiamo dare qualunque valore, è libera!

**VARIABILE DIPENDENTE  $y$**  è una lettera il cui valore dipende dal valore di  $x$ , non è libera!

**PIANO CARTESIANO** è una superficie con due rette perpendicolari (assi  $x, y$ ) che si incontrano in un punto chiamato origine

**ASCISSA** è sinonimo di asse  $x$       **ASSE  $x$** : è l'asse orizzontale (asse delle ascisse) del piano cartesiano

**ORDINATA** è sinonimo di asse  $y$       **ASSE  $y$** : è l'asse verticale (asse delle ordinate) del piano cartesiano

**O** è il centro (**origine**)

**CAMPO DI ESISTENZA** significa per quali valori di  $x$  la funzione si può calcolare.

**CODOMINIO** significa quali valori la  $y$  può avere.

**ASINTOTO** è una retta a cui la funzione si avvicina all'infinito senza mai raggiungerla

**FUNZIONE CRESCENTE** significa che la funzione da sinistra a destra va su.

**FUNZIONE DECRESCENTE** significa che la funzione da sinistra a destra va giù.

**FUNZIONE PARI** è una funzione simmetrica rispetto all'asse  $y$  e vale  $f(x) = f(-x)$

**FUNZIONE DISPARI** è una funzione simmetrica rispetto al centro O e vale  $f(x) = -f(-x)$

**FUNZIONE PERIODICA** è una funzione che si ripete sempre uguale regolarmente. Il periodo è l'intervallo della  $x$  di ripetizione della funzione

## POTENZE

$a^b$  si legge “A ELEVATO A B”:  $a$  è la **base**,  $b$  è l'**esponente**, l'operazione è l'**elevamento a potenza**.

$a^b$  significa moltiplicare  $b$  volte  $a$ , cioè:  $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ volte}}$

( $a > 0, b > 0, n$  e  $m$  sono numeri interi positivi):

**Se la base è uguale:**

1)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^{m+n} = a^m a^n$

Esempi:  $7^4 \cdot 7^5 = 7^9$

$3^{x+2} = 9 \cdot 3^x$

2)  $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$a^{m-n} = a^m \div a^n$

Esempi:  $\frac{x^7}{x^9} = x^{-2}$

$2^{x-3} = \frac{2^x}{8}$

**Se l'esponente è uguale:**

3)  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Esempi:  $(2x)^4 = 16x^4$

$2^7 \cdot 5^7 = 10^7$

4)  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Esempi:  $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$

$\frac{6^8}{3^8} = \left(\frac{6}{3}\right)^8 = 2^8$

**Altro:**

5)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

Esempi:  $(x^4)^5 = x^{20}$

$2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$

6)  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$  e  $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Esempi:  $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$

7)  $a^1 = a$ ;  $a^0 = 1$ ;

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ ;  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Esempi:  $5^{-1} = \frac{1}{5}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

**Attenzione:** espressioni con BASE NEGATIVA hanno senso solo se l'esponente è un numero intero!

$3^{-4}$	$3^{-3}$	$3^{-2}$	$3^{-1}$	$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$	$3^4$	$3^5$
$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81	243

$\Rightarrow \times 3$  (moltiplicazione)  $\Rightarrow$   $\Leftarrow$  (divisione)  $\div 3 \Leftarrow$

## RADICI

$\sqrt{a}$  si legge “RADICE QUADRATA DI A”

$\sqrt[5]{6}$  si legge “RADICE QUINTA DI 6”

$\sqrt[b]{a} = c$  significa:  $\underbrace{c \cdot c \cdot c \cdot \dots \cdot c}_b = a$

$\sqrt[n]{a}$  con **a** negativo: se  $n$  è **dispari** esiste, se  $n$  è **pari** non esiste. Esempi:  $\sqrt[4]{-8} = \nexists$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

( $a > 0, b > 0, n$  e  $m$  sono numeri interi positivi):

1)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

$\sqrt[m]{a^m} = (\sqrt[m]{a})^m = a$

Esempi:  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

$\sqrt[5]{x^5} = (\sqrt[5]{x})^5 = x$

2)  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Esempio:  $\sqrt[3]{10^6} = 10^{\frac{6}{3}} = 10^2 = 100$

3)  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Esempio:  $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

4)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Esempi:  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81}$   $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9}$

5)  $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

Esempi:  $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

## LOGARITMI

$\log_a b$  si legge “LOGARITMO IN BASE A DI B”  $[a]$  si chiama **base**  $[b]$  si chiama **argomento**

$\log b$  significa sempre  $\log_{10} b$  (importante nelle calcolatrici!)

Esiste anche la scrittura  $\ln b$ , e si intende  $\log_e b$  dove  $e = 2,718281$ .

Il numero  $a$  è sempre un numero  $> 0$  e  $\neq 1$ :  $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$   **$b > 0$  SEMPRE**

Scrivere  $x = \log_8 13$  o scrivere  $8^x = 13$  è la stessa cosa

Scrivere  $\log_8 x = 3$  o scrivere  $x = 8^3$  è la stessa cosa

Proprietà di  $\log_a b$ :

A. Se  $b \leq 0$  allora  $\log_a b = \nexists$  Esempi:  $\log_3 0 = \nexists$   $\log_{10}(-10) = \nexists$   $\log_{\frac{1}{2}}(-2) = \nexists$

B.  $a^{\log_a b} = b$   $\log_a a^b = b$  per definizione

C.  $\log a + \log b = \log(a \cdot b)$   $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

D.  $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$   $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

E.  $\log a^b = b \cdot \log a$   $b \cdot \log a = \log a^b$

F.  $\log \sqrt[b]{a} = \log a^{1/b} = \frac{1}{b} \log a$   $\frac{1}{b} \log a = \log \sqrt[b]{a}$

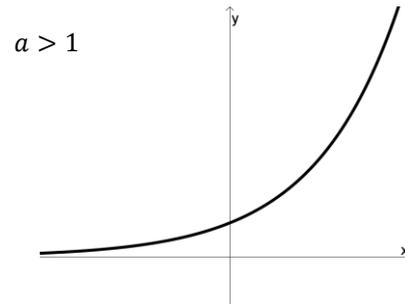
G.  $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$  Esempio:  $\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = 3,32$

<b>Dimostrazione:</b>	1) $c = \log_b a$	significa	$b^c = a$	
	2) $b^c = a$	diventa	$\log b^c = \log a$	
	3) $\log b^c = \log a$	diventa	$c \cdot \log b = \log a$	
	4) $c \cdot \log b = \log a$	diventa	$c = \frac{\log a}{\log b}$	
	5) Sostituiamo $c = \log_b a$	e allora	$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$	c.v.d.

## FUNZIONE ESPONENZIALE $y = a^x$ $[a > 0]$

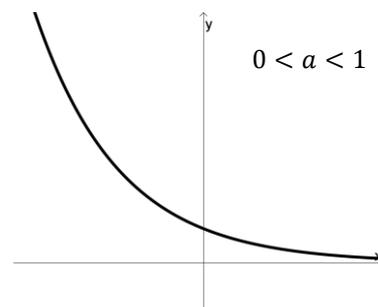
Caratteristiche con  $a \in (1; +\infty)$ :

- 1) è sempre **crescente**: se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- 2) incontra gli **assi**  $xy$  in UN punto:  $(0; 1)$
- 3) il **campo di esistenza** è  $(-\infty; +\infty)$
- 4) il **codominio** è  $(0; +\infty)$ , cioè la  $y$  è **sempre positiva**
- 5) a sinistra ha un **asintoto**  $y = 0$ , a destra va verso  $+\infty$
- 6) più è grande  $a$ , più cresce velocemente a destra



Caratteristiche con  $a \in (0; 1)$ :

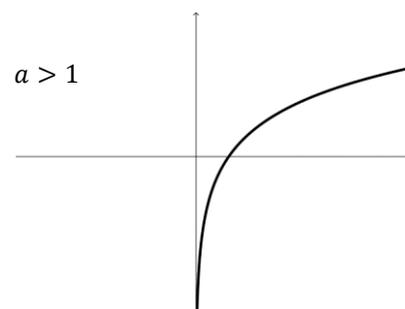
- 1) è sempre **decescente**: se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- 2) incontra gli **assi**  $xy$  sempre nello stesso punto  $(0; 1)$
- 3) il **campo di esistenza** è  $(-\infty; +\infty)$
- 4) il **codominio** è  $(0; +\infty)$ , cioè la  $y$  è **sempre positiva**
- 5) a destra ha un **asintoto**  $y = 0$ , a sinistra parte da  $+\infty$
- 6) più è piccolo  $a$ , più decresce velocemente da sinistra



## FUNZIONE LOGARITMICA $y = \log_a x$ $[a > 0, a \neq 1]$

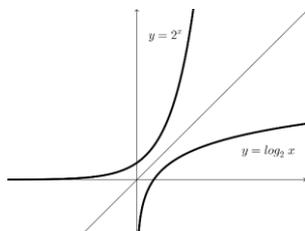
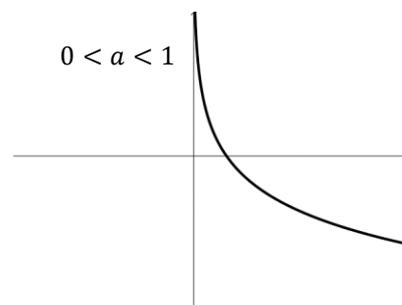
Caratteristiche con  $a \in (1; +\infty)$ :

- 1) è sempre **crescente**: se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- 2) incontra gli **assi**  $xy$  sempre nello stesso punto  $(1; 0)$
- 3) il **campo di esistenza** è  $(0; +\infty)$ , cioè  $x$  deve essere positiva
- 4) il **codominio** è  $(-\infty; +\infty)$ , cioè la  $y$  può avere qualunque valore
- 5) a sinistra ha un **asintoto**  $x = 0$ , a destra va verso  $+\infty$



Le caratteristiche della funzione logaritmica  $y = \log_a x$  con  $a \in (0; 1)$ :

- 1) è sempre **decescente**: se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- 2) incontra gli **assi**  $xy$  sempre nello stesso punto  $(1; 0)$
- 3) il **campo di esistenza** è  $(0; +\infty)$ , cioè  $x$  deve essere positiva
- 4) il **codominio** è  $(-\infty; +\infty)$ , cioè la  $y$  può avere qualunque valore
- 5) a sinistra ha un **asintoto**  $x = 0$ , a destra va verso  $-\infty$



La funzione esponenziale e quella logaritmica sono simmetriche rispetto alla retta  $y = x$

## EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Alcuni esempi (NON TUTTI) dal più facile al più difficile:

**1)  $3 \cdot 9^{2x-1} = \frac{\sqrt{3}}{27}$**  Tutto si può trasformare in numeri con la stessa base 3

$$3^1 \cdot 3^{2(2x-1)} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-3} \qquad 3^{1+4x-2} = 3^{\frac{1}{2}-3} \qquad 1 + 4x - 2 = \frac{1}{2} - 3 \qquad \boxed{x = -\frac{3}{8}}$$

**ATTENZIONE:  $3 \cdot 9^{2x-1}$  NON SIGNIFICA  $27^{2x-1}$ !!!!!!**

**2)  $4^{x+1} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9$**  Esponenziali “quasi” uguali: si deve trasformare tutto in  $4^x$

$$4^x \cdot 4 + 2 \cdot 4^x \cdot \frac{1}{4} = 9 \qquad 4^x \left(4 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = 9 \qquad 4^x \cdot \frac{9}{2} = 9 \qquad 4^x = 2 \qquad \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

**3)  $8 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x$**  Esponenziali con basi diverse: si trasforma tutto in logaritmo – **calcolatrice!**

$$\log(8 \cdot 2^x) = \log(4 \cdot 5^x) \qquad \log 8 + x \log 2 = \log 4 + x \log 5 \qquad 0,9 + 0,3x = 0,6 + 0,7x \qquad \boxed{x \cong 0,75}$$

**4)  $8^{2x} - 3 \cdot 8^x - 4 = 0$**  Esponenziali con  $x$  e  $2x$ : **sostituzione**  $8^x = y$ ,  $8^{2x} = y^2$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \qquad y_1 = 4 \qquad 8^{x_1} = 4 \qquad 2^{3x_1} = 2^2 \qquad \boxed{x_1 = \frac{2}{3}}$$

**SEMPRE bisogna trovare  $x$ !!!**  $y_2 = -1$   $8^{x_2} = -1$   $\boxed{x_2 = \cancel{1}}$

**5)  $64^x - 3 \cdot 8^x - 4 = 0$**  Esponenziali con uno quadrato dell'altro:  $64^x = 8^{2x}$  come 4)

**6)  $8^x - 3 - 4 \cdot 8^{-x} = 0$**  Se ci sono  $x$  e  $-x$  moltiplica tutto per  $8^x$ :  $8^{2x} - 3 \cdot 8^x - 4 = 0$

**7) Disequazione con base  $> 1$ :** si procede come nelle equazioni

$$2^{3x-5} < \frac{1}{4} \qquad 2^{3x-5} < 2^{-2} \qquad 3x - 5 < -2 \qquad \boxed{x < 1}$$

**8) Disequazione con base  $< 1$ :** si procede come nelle equazioni, ma **si cambia verso di  $>$ ,  $<$  !!!**

$$0,5^{3x-5} < \frac{1}{4} \qquad 0,5^{3x-5} < 0,5^2 \qquad 3x - 5 > 2 \qquad \boxed{x > \frac{7}{3}}$$

## EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Alcuni esempi (NON TUTTI), in ordine di difficoltà

1)  $\log(3x + 7) = 0$        $3x + 7 = 1$        $x = -2$

2)  $\log(4x + 8) = 2$        $4x + 8 = 10^2$        $x = 23$

3)  $\log(7x - 12) = \log(3x + 8)$        $7x - 12 = 3x + 8$        $x = 5$

4)  $2 \log(6 - 7x) = 2 + \log(x + 6)$        $2 \log(6 - 7x) - \log(x + 6) = 2$

$$\log \left[ \frac{(6-7x)^2}{x+6} \right] = 2 \qquad \frac{(6-7x)^2}{x+6} = 100 \qquad 49x^2 - 84x + 36 = 100x + 600$$

$$49x^2 - 184x - 564 = 0 \qquad x_1 = \frac{282}{49} \qquad x_2 = -2$$

5)  $\log^2 x - \log x - 2 = 0$       **Sostituzione**  $\log x = y$       ( $\log^2 x = y^2$ )

$$y^2 - y - 2 = 0 \qquad \text{DISCRIMINANTE: } y_1 = 2 \quad y_2 = -1$$

**DEVI tornare a x:**     $\log x = 2$  ha soluzione  $x = 100$        $\log x = -1$  ha soluzione  $x = 0,1$

6) **Disequazione con base > 1:** si procede come nelle equazioni

$$\ln_2(x + 2) \leq 3 \quad [\text{condizioni } x > -2] \quad x + 2 \leq 2^3 \quad x \leq 6 \text{ e } x > -2 \quad x \in (-2; 6]$$

7) **Disequazione con base < 1:** si procede come nelle equazioni, ma **si cambia verso di >, < !!!**

$$\ln_{0,5}(x + 2) \leq 3 \quad [\text{condizioni } x > -2] \quad x + 2 \geq 0,5^3 \quad x \geq \frac{1}{8} - 2 \quad x > -\frac{15}{8}$$

### ALCUNI CONSIGLI:

CONVIENE mettere i logaritmi a sinistra in un UNICO logaritmo

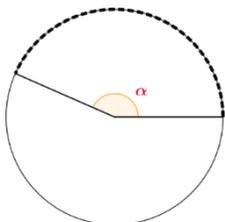
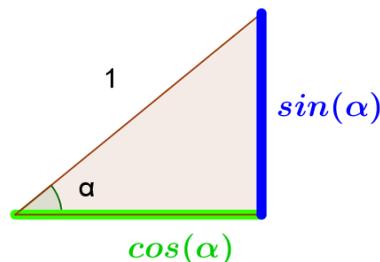
Il numero DENTRO il logaritmo non può essere negativo, ma **x può essere negativo!**

**Scrivere  $\log^2 x$  è diverso da  $\log x^2$**

**VERIFICA SEMPRE LE SOLUZIONI:** metti all'inizio il valore di x trovato, dentro il logaritmo il numero deve essere positivo! Ad esempio in  $2 \log(6 - 7x) = 2 + \log(x + 6)$      $x_1 = \frac{282}{49}$  non va bene!

## CIRCONFERENZA GONIOMETRICA – TEORIA

In un triangolo rettangolo con ipotenusa 1 e angolo  $\alpha$   
**i due cateti sono  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$ .**



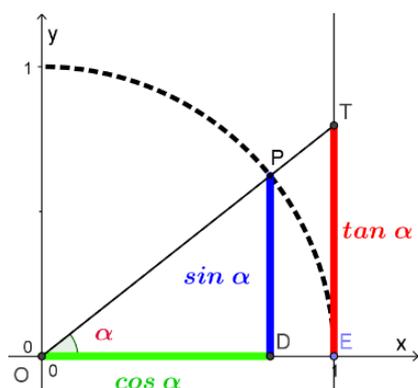
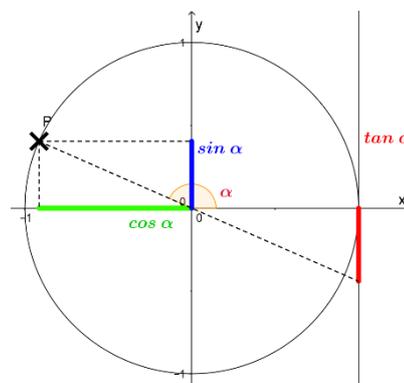
In una circonferenza di **raggio 1** disegniamo un angolo  $\alpha$ .

La lunghezza della circonferenza è  $2\pi$ .

**La lunghezza dell'arco di circonferenza è l'angolo  $\alpha$  in radianti.**

La **circonferenza goniometrica** è una circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine del piano  $xOy$ .

- 1) la distanza tra P e O è sempre 1  $|OP| = 1$
- 2) il punto P ha coordinate  $P(\cos \alpha ; \sin \alpha)$**
- 3) la parte verde è il coseno di alfa **verde =  $\cos \alpha$**
- 4) la parte blu è il seno di alfa **blu =  $\sin \alpha$**
- 5) la parte rossa è la tangente di alfa **rosso =  $\tan \alpha$**



La tangente di un angolo è  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

Il significato grafico è il segmento ET:  **$\tan \alpha = |ET|$**

- 1)  $|OP| = |OE| = 1$   $|OD| = \cos \alpha$   $|DP| = \sin \alpha$
- 2) Nel triangolo ODP:  **$\tan \alpha = \frac{\text{lato opposto}}{\text{lato vicino}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$**
- 3) Nel triangolo OET:  **$\tan \alpha = \frac{\text{lato opposto}}{\text{lato vicino}} = \frac{|ET|}{1} = |ET|$**
- 4) I risultati sono uguali:  **$|ET| = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$**

FORMULE IMPORTANTI:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

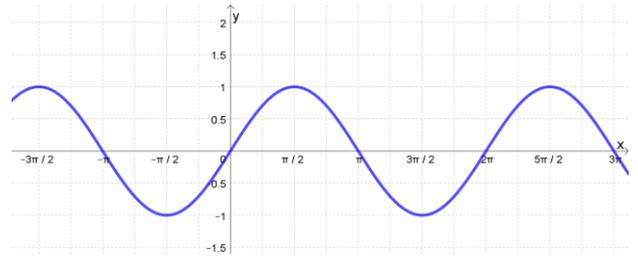
**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA – ESEMPI**

<p>Angolo <math>0^\circ</math>, <math>0</math> radianti oppure <math>360^\circ</math>, <math>2\pi</math></p> <p><math>P(1,0)</math>      <math>\cos 0 = 1</math> <math>\sin 0 = 0</math>    <math>\tan 0 = 0</math></p>	<p><math>30^\circ</math>, <math>\frac{\pi}{6}</math> radianti</p> <p><b>APO è equilatero</b></p> <p><math>P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}</math> <math>\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}</math>      <math>\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}</math></p>	<p><math>45^\circ</math>, <math>\frac{\pi}{4}</math> radianti</p> <p><b>APCO è un quadrato</b></p> <p><math>P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math> <math>\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math>      <math>\tan \frac{\pi}{4} = 1</math></p>	<p><math>60^\circ</math>, <math>\frac{\pi}{3}</math> radianti</p> <p>come <math>30^\circ</math> ma “in piedi”</p> <p><math>P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}</math> <math>\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}</math>      <math>\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}</math></p>
<p><math>90^\circ</math>, <math>\frac{\pi}{2}</math> radianti</p> <p><math>P(0,1)</math>      <math>\cos \frac{\pi}{2} = 0</math> <math>\sin \frac{\pi}{2} = 1</math>    <math>\tan \frac{\pi}{2} = \cancel{\neq}</math></p>	<p><math>120^\circ</math>, <math>\frac{2\pi}{3}</math> radianti</p> <p><math>P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}</math> <math>\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}</math>      <math>\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}</math></p>	<p><math>135^\circ</math>, <math>\frac{3\pi}{4}</math> radianti</p> <p><math>P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}</math> <math>\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math>      <math>\tan \frac{3\pi}{4} = -1</math></p>	<p><math>150^\circ</math>, <math>\frac{5\pi}{6}</math> radianti</p> <p><math>P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math> <math>\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}</math>      <math>\tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}</math></p>
<p><math>180^\circ</math>, <math>\pi</math> radianti</p> <p><math>P(-1,0)</math>      <math>\cos \pi = -1</math> <math>\sin \pi = 0</math>    <math>\tan \pi = 0</math></p>	<p><math>210^\circ</math>, <math>\frac{7\pi}{6}</math> radianti</p> <p><math>P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math> <math>\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}</math>      <math>\tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}</math></p>	<p><math>225^\circ</math>, <math>\frac{5\pi}{4}</math> radianti</p> <p><math>P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}</math> <math>\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}</math>      <math>\tan \frac{5\pi}{4} = 1</math></p>	<p><math>240^\circ</math>, <math>\frac{4\pi}{3}</math> radianti</p> <p><math>P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}</math> <math>\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math>      <math>\tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}</math></p>
<p><math>270^\circ</math>, <math>\frac{3\pi}{2}</math> radianti</p> <p><math>P(0,-1)</math>      <math>\cos \frac{3\pi}{2} = 0</math> <math>\sin \frac{3\pi}{2} = -1</math>    <math>\tan \frac{3\pi}{2} = \cancel{\neq}</math></p>	<p><math>300^\circ</math>, <math>\frac{5\pi}{3}</math> radianti</p> <p><math>P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}</math> <math>\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math>      <math>\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}</math></p>	<p><math>315^\circ</math>, <math>\frac{7\pi}{4}</math> radianti</p> <p><math>P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math> <math>\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}</math>      <math>\tan \frac{7\pi}{4} = -1</math></p>	<p><math>330^\circ</math>, <math>\frac{11\pi}{6}</math> radianti</p> <p><math>P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)</math>      <math>\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}</math> <math>\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}</math>      <math>\tan \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}</math></p>

## FUNZIONE $y = \sin x$

Il disegno si chiama **sinusoide**. Caratteristiche:

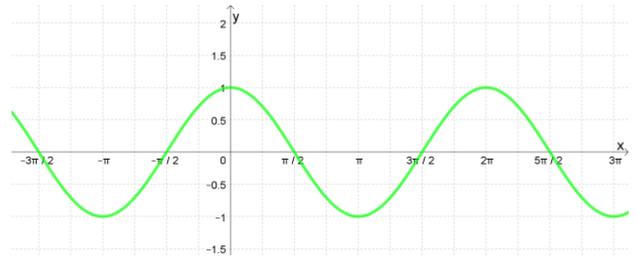
- 1) **periodica** di periodo  $2\pi$ , cioè  $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$
- 2) il **campo di esistenza** della  $x$  è  $(-\infty; +\infty)$
- 3) il **codominio** della  $y$  è  $[-1; +1]$
- 4) non ci sono asintoti
- 5) incontra gli assi in infiniti punti:  $O(0; 0)$ ,  $(\pi; 0)$ ,  $(2\pi; 0)$ ,  $(3\pi; 0)$  ...  $(k\pi; 0)$
- 6) è **dispari**, cioè simmetrica rispetto al centro, cioè  $\sin(-x) = -\sin x$
- 7)  $\sin x > 0$  per  $x \in (0; \pi)$                        $\sin x < 0$  per  $x \in (\pi; 2\pi)$



## FUNZIONE $y = \cos x$

Caratteristiche:

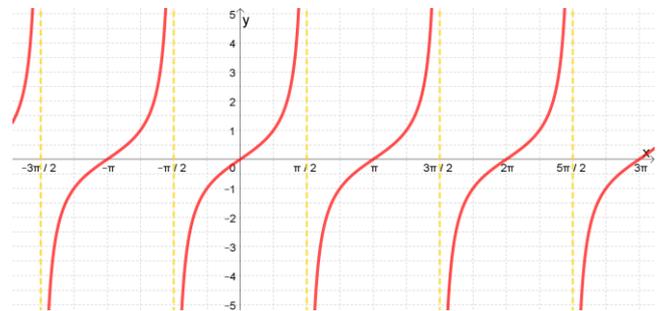
- 1) **periodica** di periodo  $2\pi$ , cioè  $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$
- 2) il **campo di esistenza** della  $x$  è  $(-\infty; +\infty)$
- 3) il **codominio** della  $y$  è  $[-1; +1]$
- 4) non ci sono asintoti
- 5) incontra gli assi in infiniti punti:  $O(0; 1)$ ,  $(\frac{\pi}{2}; 0)$ ,  $(\frac{3}{2}\pi; 0)$ ,  $(\frac{5}{2}\pi; 0)$  ...  $(\frac{\pi}{2} + k\pi; 0)$
- 6) è **pari**, cioè simmetrica rispetto all'asse  $y$ , cioè  $\cos(-x) = \cos x$
- 7)  $\cos x > 0$  per  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$                        $\cos x < 0$  per  $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$



## FUNZIONE $y = \tan x$

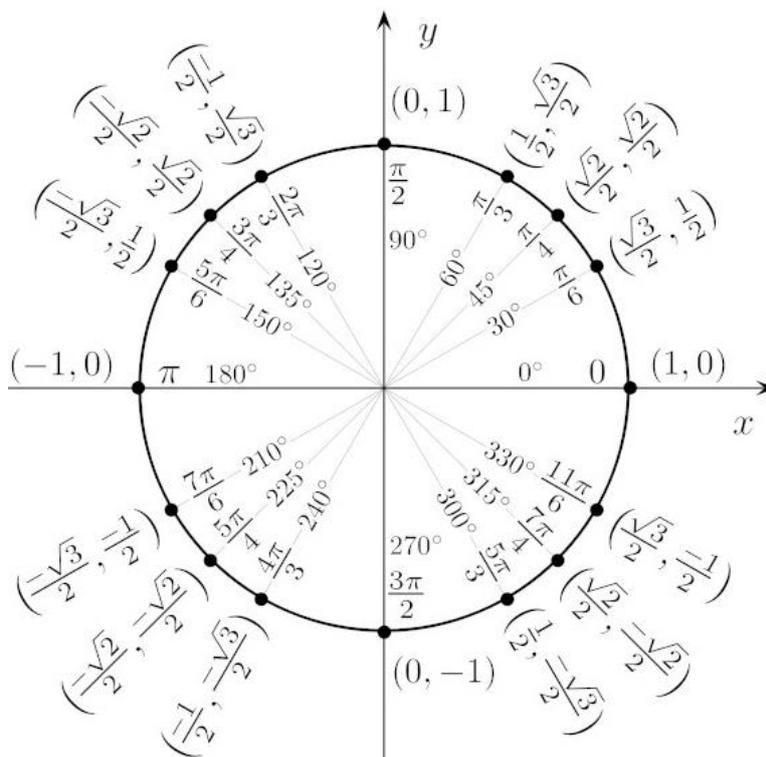
Caratteristiche:

- 1) **periodica** di periodo  $\pi$ , cioè  $\tan x = \tan(x + \pi)$
- 2) **campo di esistenza**  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,
- 3) ha infiniti **asintoti**, le rette  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 4) **codominio**  $y \in (-\infty; +\infty)$
- 5) è **dispari**, cioè simmetrica rispetto al centro, cioè  $\tan(-x) = -\tan x$
- 6) incontra gli assi nei punti:  $O(0; 0)$ ,  $(\pi; 0)$ ,  $(2\pi; 0)$ ,  $(3\pi; 0)$  ...  $(k\pi; 0)$
- 7)  $\tan x < 0$  quando  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$                        $\tan x > 0$  quando  $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$



Ci sono dei punti in cui la funzione non esiste, gli **asintoti** sono disegnati in giallo.

## EQUAZIONI GONIOMETRICHE



- $x$  è un ANGOLO, invece seno, coseno, tangente sono NUMERI. **Le soluzioni sono ANGOLI!**
- Le equazioni  $\sin x = qualcosa$  hanno di solito **2 soluzioni** in  $[0; 2\pi)$ :  
 $x_1 = \alpha$      $x_2 = \pi - \alpha$     Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione
- Le equazioni  $\cos x = qualcosa$  hanno di solito **2 soluzioni** in  $[0; 2\pi)$ :  
 $x_1 = \alpha$      $x_2 = 2\pi - \alpha$     Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione
- $\sin x$  e  $\cos x$  hanno periodo  $2k\pi$ , cioè le soluzioni sono  $x_1 + 2k\pi$      $x_2 + 2k\pi$
- Le equazioni  $\sin x = 1$ ,  $\sin x = -1$ ,  $\cos x = 1$ ,  $\cos x = -1$  hanno **UNA soluzione in  $[0; 2\pi)$** .
- Fuori da  $[-1; 1]$  l'equazione con seno e coseno è **SENZA soluzioni**:  $\sin x = \sqrt{2}$ ,  $\cos x = -2...$
- Le equazioni  $\tan x = qualcosa$  hanno **SEMPRE 2 soluzioni** in  $[0; 2\pi)$ :  
 $x_1 = \alpha$      $x_2 = \pi + \alpha$     Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione
- $\tan x$  ha periodo  $k\pi$ , cioè le soluzioni sono  $x_1 + k\pi$

$\sin 2x$  ha periodo  $k\pi$ ,  $\sin 3x$  periodo  $\frac{2k\pi}{3}$ ,  $\sin 4x$  periodo  $\frac{k\pi}{2}$ ,  $\sin 5x$  periodo  $\frac{2k\pi}{5}...$

$\sin \frac{x}{2}$  ha periodo  $4k\pi$ ,  $\sin \frac{x}{3}$  ha periodo  $6k\pi...$  La stessa cosa vale per il coseno.

La tangente ha sempre periodo metà di seno e coseno.

## FORMULE UTILI SUGLI ANGOLI

### Fondamentali:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\cos^2 x$  significa  $(\cos x)^2$  mentre  $\cos x^2$  significa  $\cos(x^2)$

### Periodicità:

$$\cos x = \cos(x + 2\pi)$$

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

$$\tan x = \tan(x + \pi)$$

### Simmetrie:

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

### Somma, differenza, duplicazione:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\left(\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$\left(\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)$$

### FORMULE SUI TRIANGOLI:

#### Teorema dei seni:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

oppure

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

#### Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

#### Formule area triangolo:

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2}$$

$$A = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin \beta}{2}$$

## ESERCIZI BASE DI TRIGONOMETRIA

Risolvere un triangolo significa trovare tutti gli angoli, tutti i lati, perimetro e area usando i teoremi dei seni e del coseno. Di seguito alcuni esempi:

1. Conosco **tre lati**  $a = 7$  cm,  $b = 3$  cm,  $c = 5$  cm.

Uso uno dei **teoremi del coseno**, ad esempio il secondo:

$$3^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cos \beta \quad \cos \beta = \frac{65}{70} = \frac{13}{14}$$

$$\beta = 21,79^\circ$$

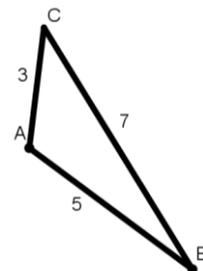
Uso di nuovo il teorema del coseno:  $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \alpha$

$$\alpha = 120^\circ$$

Il terzo angolo è

$$\gamma = 180^\circ - \beta - \alpha$$

$$\gamma = 38,21^\circ$$



2. Conosco **un lato e due angoli**  $b = 10$  cm,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 75^\circ$ .

Trovo subito il terzo angolo  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

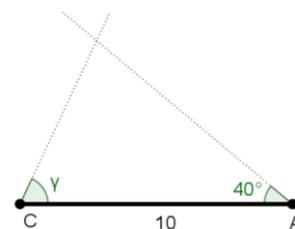
$$\gamma = 65^\circ$$

Uso il **teorema dei seni**  $\frac{10}{\sin 75^\circ} = \frac{a}{\sin 40^\circ}$

$$a = 6,65 \text{ cm}$$

Uso il teorema dei seni  $\frac{10}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 65^\circ}$

$$c = 9,38 \text{ cm}$$



3a. Conosco **due lati e l'angolo tra i lati**  $a = 8$  cm,  $b = 5$  cm,  $\gamma = 60^\circ$ .

Uso il **teorema del coseno**

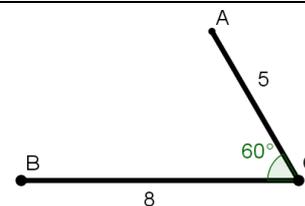
$$c^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$c = 7 \text{ cm}$$

Poi continuo come l'esempio 1

$$\alpha = 81,79^\circ$$

$$\beta = 38,21^\circ$$



3b. Conosco **2 lati e l'angolo non compreso**  $b = 7$  cm,  $c = 5$  cm,  $\gamma = 40^\circ$

Uso il **teorema del coseno**

$$5^2 = a^2 + 7^2 - 2 \cdot a \cdot 7 \cdot \cos 40^\circ$$

**Due possibili soluzioni!**

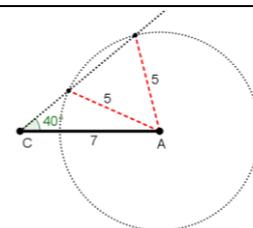
$$a_1 = 7,54 \text{ cm}$$

$$a_2 = 3,18 \text{ cm}$$

Adesso conosco tre lati, continuo come l'esempio 1

$$a_1 = 75,85^\circ$$

$$a_2 = 24,15^\circ$$



✓ Usa sempre la formula con una sola incognita

✓ Dai precedenza al teorema del coseno, il seno ha a volte due soluzioni!

## COORDINATE CARTESIANI E POLARI

Ogni punto  $P[x; y]$  si può disegnare nel piano cartesiano.  $x$  si chiama **ascissa**,  $y$  si chiama **ordinata**.

La **lunghezza**  $|OP|$  tra  $P[x; y]$  e  $O[0; 0]$  si calcola con Pitagora e si chiama  $|z|$ :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'angolo  $\theta$  che  $PO$  forma con l'asse  $x$  si chiama  $\theta$ . Per la goniometria

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases}$$

L'angolo  $\theta$  si può calcolare in tanti modi:

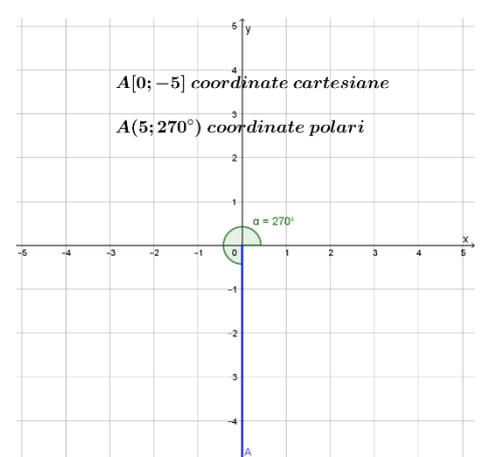
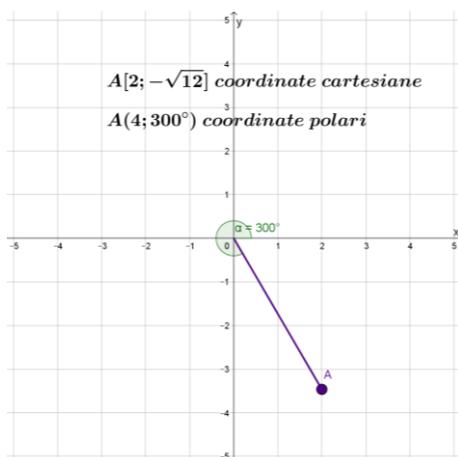
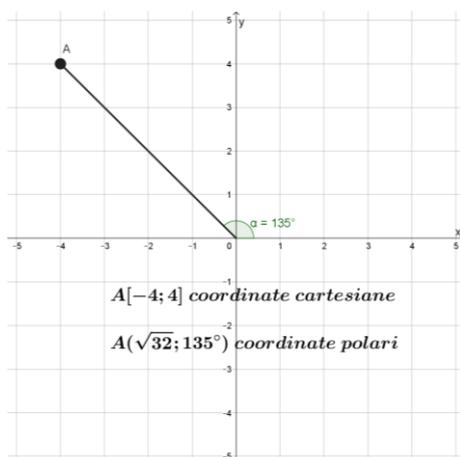
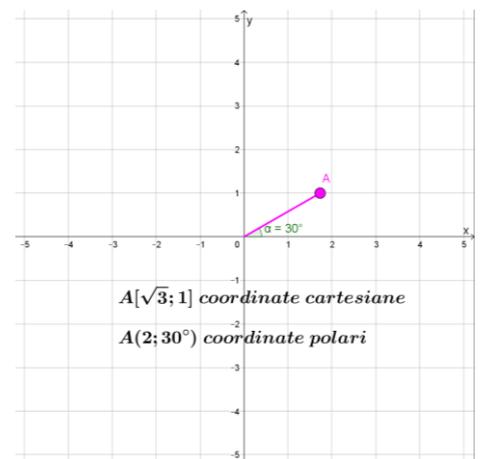
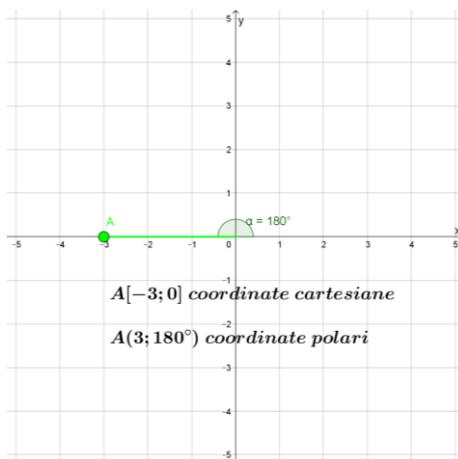
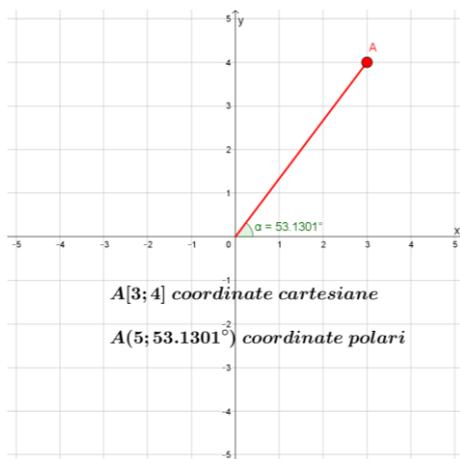
$$\cos \theta = \frac{x}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{|z|}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Se il punto si scrive  $[x; y]$  è in coordinate **cartesiane**, se il punto si scrive  $(|z|; \theta)$  è in coordinate **polari**.

Ecco alcuni esempi di punti scritti in coordinate cartesiane e polari:



## NUMERI IMMAGINARI

Le equazioni  $x^2 + 1 = 0$        $x^2 + 4 = 0$        $x^2 + 9 = 0 \dots$       non hanno soluzione.

I matematici non sono contenti di equazioni senza soluzione e quindi hanno inventato le soluzioni.

Il numero  $i$  si chiama **unità immaginaria** e ha questa caratteristica:  $i^2 = -1$

L'equazione  $x^2 + 1 = 0$  ha adesso soluzioni  $x_1 = i$ ,  $x_2 = -i$ .

L'equazione  $x^2 + 4 = 0$  ha adesso soluzioni  $x_1 = 2i$ ,  $x_2 = -2i \dots$

Si può dire che  $\sqrt{-1} = \pm i$        $\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$        $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$        $\sqrt{-4} = \pm 2i \dots$

## NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi si chiamano così (*složená čísla*) perché sono numeri formati da una coppia di numeri.

I numeri complessi  $z$  si scrivono come i punti, ad esempio:  $[1; -1]$       oppure       $(\sqrt{2}; 315^\circ)$

I numeri complessi  $z$  si possono scrivere anche così:  $z = x + yi$       (ad esempio  $z = 3 - 4i$ )

Le operazioni dei numeri complessi sono quelle che conosciamo, ma sempre vale  $i^2 = -1$ .

$z = x + iy$        **$z$  numero complesso**      UN numero e DUE parti (reale e immaginaria)

$\bar{z} = x - iy$        **$\bar{z}$  complesso coniugato**      cambia il segno della parte immaginaria

**Somma, differenza:**  $(3 - 4i) + (-2 + 5i) = 1 + i$        $(3 - 4i) - (-2 + 5i) = 5 - 9i$

**Prodotto:**  $(3 - 2i) \cdot (2 + i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot i + (-2i) \cdot 2 + (-2i) \cdot i = 6 + 3i - 4i - 2 \cdot (-1) = 8 - i$

**Divisione:**  $\frac{3+4i}{i} = \frac{3+4i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{4-3i}{1} = 4 - 3i$        $\frac{2+5i}{1-i} = \frac{2+5i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+5i+5i^2}{1-i^2} = \frac{2-5+7i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$

Con i numeri complessi l'equazione di secondo grado a coefficienti reali ha SEMPRE due soluzioni.

$x^2 + 1 = 0$        $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$        $x^2 - 6x + 10 = 0$        $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \begin{cases} 3 + i \\ 3 - i \end{cases}$

Un'equazione di secondo grado ha  $\begin{cases} \Delta > 0 & \text{due soluzioni reali} \\ \Delta = 0 & \text{due soluzioni reali uguali} \\ \Delta < 0 & \text{due soluzioni } \textit{complesse coniugate} \end{cases}$

## FORMA ALGEBRICA E FORMA TRIGONOMETRICA

I numeri complessi sono **vettori** su un piano chiamato **piano di Gauss**.

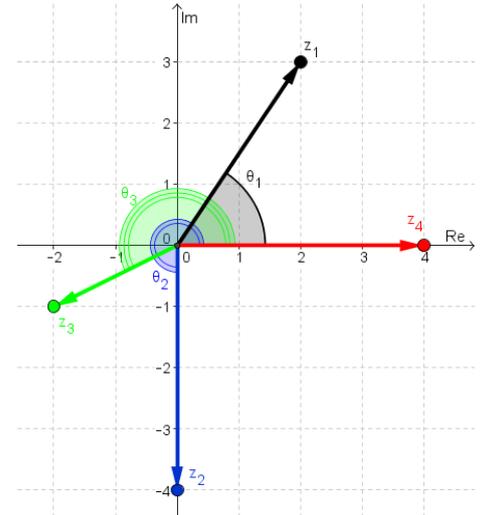
A destra sono disegnati alcuni numeri complessi come vettori:

$$z_1 = 2 + 3i = \sqrt{13}(\cos 56^\circ + i \sin 56^\circ)$$

$$z_2 = -4i = 4\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$z_3 = -2 - i = \sqrt{5}(\cos 207^\circ + i \sin 207^\circ)$$

$$z_4 = 4 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$$



**Modulo  $|z|$**  la distanza del punto da  $O$ , si calcola con il teorema di Pitagora:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Argomento  $\theta$**  l'angolo con l'asse  $x$ , si trova con  $\tan \theta$  oppure con  $\cos \theta$ .

$$\text{se } x > 0 \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{se } x < 0 \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

$$\text{se } y > 0 \quad \theta = \arccos\frac{x}{|z|} \qquad \text{se } y < 0 \quad \theta = -\arccos\frac{x}{|z|}$$

$$\text{se } x > 0 \quad \theta = \arcsin\frac{y}{|z|} \qquad \text{se } x < 0 \quad \theta = \pi - \arcsin\frac{y}{|z|}$$

**Il disegno aiuta a trovare l'angolo giusto!**

Se di un numero complesso conosciamo  $|z|$  e  $\theta$  possiamo trovare  $x$  e  $y$ :

$$x = |z| \cos \theta \qquad y = |z| \sin \theta$$

Un numero complesso si può scrivere in due modi:

**FORMA ALGEBRICA:**  $z = x + iy$

**FORMA TRIGONOMETRICA:**  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

Il coniugato:  $\bar{z} = |z|(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

## REGOLE PRATICHE CON I NUMERI COMPLESSI

**Prodotto trigonometrico:**  $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

**MOLTIPLICAZIONE dei moduli, SOMMA degli angoli**

**Divisione trigonometrica:**  $z_1 \div z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$

**DIVISIONE dei moduli, DIFFERENZA degli angoli**

**Potenze trigonometriche:**  $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$  Ad esempio  $\left(2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^6 = 64 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$

**MODULO ELEVATO A n, ANGOLO MOLTIPLICATO PER n**

Regole utili con il modulo:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$   $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$   $|z^n| = |z|^n$

**Radici trigonometriche:**  $z^n = w$  con  $w$  numero complesso e angolo  $\theta_w$  ha  $n$  soluzioni complesse:

$$z_k = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left( \cos \left( \frac{\theta_w}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta_w}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-1$$

La scrittura  $|z_1 - z_2|$  significa la **distanza** sul piano di Gauss tra  $z_1$  e  $z_2$ . Per i **disegni**:

$|z| = R$  cerchio di raggio  $R$  e centro in  $(0; 0)$

$|z - z_1| = R$  cerchio di raggio  $R$  e centro in  $(x_1, y_1)$  ( $z_1 = x_1 + i y_1$ )  
Esempio:  $|z - 3 + 2i| = 5$  è una circonferenza di raggio 5 e centro in  $(3, -2)$

$|z - z_1| = |z - z_2|$  retta asse tra i punti  $z_1$  e  $z_2$

**Equazione con  $z$  e  $\bar{z}$ :** si trasforma:  $z = x + iy$   $\bar{z} = x - iy$  e si fanno due equazioni

Esempio:  $3z - 4\bar{z} = 4 - 14i$   $3x + 3iy - 4x + 4iy = 4 - 14i$   $\begin{cases} 3x - 4x = 4 \\ 3y + 4y = -14 \end{cases}$

$x = -4, y = -2$  Il risultato è  $z = -4 - 2i$

Esempio:  $5z - 3i\bar{z} = 1 + 9i$   $5x + 5iy - 3ix - 3y = 1 + 9i$

Diventa un sistema:  $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 5y - 3x = 9 \end{cases}$  che ha soluzioni  $x = 2, y = 3$  Il risultato è  $z = 2 + 3i$

**FORMA ESPONENZIALE:**  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad z_1 \div z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \bar{z} = |z|e^{-i\theta}$$

$$z^n = |z|^n \cdot e^{in\theta} \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\theta}{n}i}$$

*Il numero  $e^{3\pi i}$  è formato da un numero intero (3), un numero geometrico ( $\pi$ ), un numero matematico ( $e$ ) e un numero che non esiste ( $i$ ). Ma il risultato  $e^{3\pi i} = -1$ . Non è incredibile?*

## CALCOLO COMBINATORIO

Operazione **FATTORIALE**:  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$0! = 1$

$1! = 1$

**Unica regola possibile** è semplificare la divisione:  $\frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5$

**NON FUNZIONA:**

$4! \cdot 3! \neq 7!$

$3! + 5! \neq 8!$

$9! - 7! \neq 2!$

$\frac{8!}{5!} \neq 3!$

**ANAGRAMMI:**

Se una parola ha  $n$  lettere i possibili anagrammi sono  $n!$  diviso i fattoriali delle lettere ripetute.

SOLE ha  $4! = 24$  anagrammi

TAVOLO ha  $\frac{6!}{2!} = 360$  anagrammi (O si ripete 2 volte)

CONTARE ha  $7! = 5040$  anagrammi

MAMMA ha  $\frac{5!}{3!2!} = 10$  anagrammi (M si ripete 3 volte, A si ripete 2 volte)

MATEMATICA ha  $\frac{10!}{2!2!3!} = 151.200$  anagrammi (M e T si ripetono 2 volte, A si ripete 3 volte)

Regola **PRODOTTO**:  $a \cdot b$ 

Creo una **coppia**, cioè scelgo un elemento di un gruppo e un elemento di un gruppo (anche uguale), il numero di combinazioni è il prodotto del numero di elementi di ciascun gruppo

In quanti modi posso scegliere una coppia ragazzo – ragazza in una classe con 9 ragazzi e 13 ragazze?  $9 \cdot 13 = 117$

In quanti modi posso formare una targa italiana LL NNN LL (L lettera, N numero)?  $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26$

**DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE**:  $\frac{n!}{(n-k)!}$ 

Scelgo  $k$  elementi di un gruppo di  $n$  elementi. L'ordine di scelta **cambia il risultato**. Scelgo ogni elemento **solo una volta**.

In quanti modi posso formare numeri di 3 cifre usando al massimo una volta le cifre 1, 2, 3, 4, 5?  $5 \cdot 4 \cdot 3$

In quanti modi posso formare una parola di 4 lettere usando al massimo una volta le lettere D, O, R, M, I, R, E?  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

**PERMUTAZIONI**:  $n!$ 

Come le **variazioni**, quando  $k = n$ , cioè uso tutti gli elementi

In quanti modi posso formare numeri di 5 cifre usando al massimo una volta le cifre 1, 2, 3, 4, 5?  $5! = 120$

In quanti modi posso formare una parola di 7 lettere usando al massimo una volta le lettere D, O, R, M, I, R, E?  $7! = 5040$

**DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE**:  $n^k$ 

Scelgo  $k$  elementi di un gruppo di  $n$  elementi. L'ordine di scelta **cambia il risultato**. Posso scegliere un elemento **più volte**.

Quanti numeri di 4 cifre sono formati soltanto dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5?  $5^4 = 625$

Quante parole di 5 lettere sono formate solo dalle lettere A, B, C?  $3^5 = 243$

**COMBINAZIONI**:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  Si chiama **coefficiente binomiale** e si legge “ $n$  su  $k$ ”

Scelgo  $k$  elementi di un gruppo di  $n$  elementi. L'ordine di scelta **non cambia il risultato**. Scelgo ogni elemento **solo una volta**.

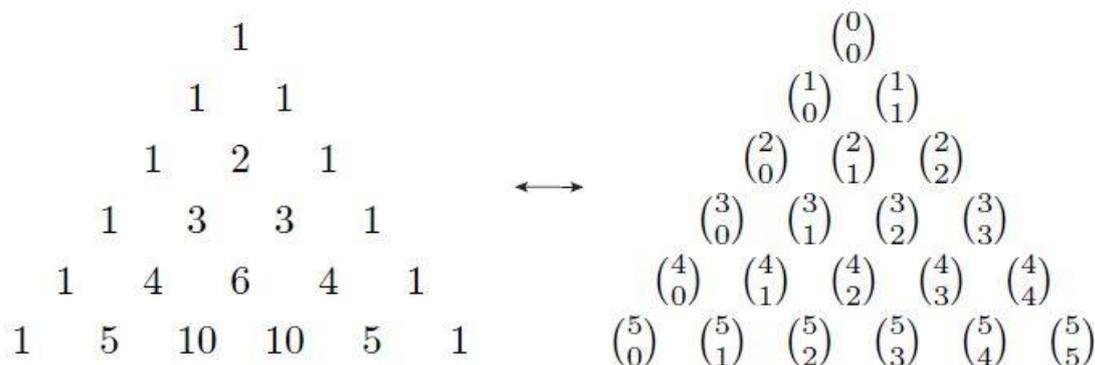
Scelgo 3 studenti di una classe di 25 studenti. Quante possibili terne ci sono?  $\binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 230$

In quanti modi posso scegliere 4 cioccolatini da una scatola di 10 cioccolatini?  $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

**Giuste domande:**

- Posso trasformare l'esercizio in un esercizio che già conosco?
- Quanti elementi devo scegliere? ( $k$ )
- Fra quanti elementi devo scegliere? ( $n$ )
- Cambia se si sceglie prima A e poi B o prima B e poi A? (l'ordine è importante?)
- Quante volte posso scegliere lo stesso elemento? (c'è ripetizione o no?)

### TRIANGOLO DI PASCAL



**Tre regole:**      A) si inizia da 1      B) il numero sotto è la somma dei numeri sopra  
 C) La somma degli elementi di ogni riga è  $2^k$

Dalla regola A:  $\binom{0}{0} = 1$

Dalla regola B:  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dalla regola C:  $(A + B)^0 = 1$

$$(A + B)^1 = 1 \cdot A + 1 \cdot B$$

$$(A + B)^2 = 1 \cdot A^2 + 2AB + 1 \cdot B^2$$

$$(A + B)^3 = 1 \cdot A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + 1 \cdot B^3$$

$$(A + B)^4 = 1 \cdot A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + 1 \cdot B^4$$

$$(A + B)^5 = 1 \cdot A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + 1 \cdot B^5$$

... ..

$$(A + B)^n = \binom{n}{0} A^n B^0 + \binom{n}{1} A^{n-1} B^1 + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 B^{n-1} + \binom{n}{n} A^0 B^n$$

Esempi:  $11^2 = 121$

$11^3 = 1331$

$11^4 = 14641$

$11^5 = 161051 \dots$

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 40x^2 + 40x + 32 \quad (B = 2)$$

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad (B = -1)$$

$$(1 + i)^6 = 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i \quad (B = i)$$

$$(3 + 4)^5 = 3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot 4 + 10 \cdot 3^3 \cdot 4^2 + 10 \cdot 3^2 \cdot 4^3 + 5 \cdot 3 \cdot 4^4 + 4^5 = 243 + 1620 + 4320 + 5760 + 3840 + 1024 = 16\,807$$

## PROBABILITÀ – GENERALE

Un **EVENTO** è descritto da una frase, che può essere vera o falsa.

Esempi: “È uscita la pallina rossa alla roulette”, “È uscito il 3 nel lancio di un dado”.

Due **eventi** sono **INDIPENDENTI** quando il verificarsi dell'uno non influenza il verificarsi dell'altro. In caso contrario sono **DIPENDENTI**.

Esempi: “Nevica” e “c'è il test di matematica” sono indipendenti. “Nevica” e “ci sono incidenti” sono dipendenti.

Se i casi sono **ugualmente possibili**, la probabilità di un evento è  $p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$   $0 \leq p \leq 1$

Se un evento E ha possibilità  $p(E) = 0$  allora si dice **IMPOSSIBILE**.

Se  $p(E) = 1$  allora si dice **CERTO**.

$\bar{E}$  si legge **nonE** e si chiama **evento CONTRARIO** di E:  $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

La parola “**O**” significa che avviene l'evento **A oppure l'evento B oppure entrambi** gli eventi.

La parola “**E**” significa che avvengono **contemporaneamente entrambi** gli eventi.

Usando  $\cup = \text{unione "o"}$  e  $\cap = \text{intersezione "e"}$  avremo  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

**Se** gli eventi sono **indipendenti**:  $p(A \text{ e } B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Se  $p(A \cap B) = 0$  allora A e B si dicono **INCOMPATIBILI** e  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

## PROBABILITÀ CONDIZIONATA

**Probabilità CONDIZIONATA** è una probabilità che dipende da delle condizioni, cioè: se è successo un fatto B, qual è la probabilità che sia successo anche il fatto A?

La probabilità condizionata di un evento A, sapendo che è già successo l'evento B si scrive  $p(A|B)$  e si legge “**Probabilità di A se B**”. Questa probabilità è:  $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$  (legge di Bayes)

$p(A|B)$  è la probabilità che si verifica A, se già so che si è verificato B

Due eventi sono **indipendenti** se  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Teorema della probabilità composta:  $p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$

## PROBABILITÀ - ESEMPI

## LANCIO DI MONETE

Lancio 10 volte una moneta. Qual è la probabilità che testa esca più di croce?

$$\text{Soluzione 1: } p(6) = \frac{\binom{10}{6}}{2^{10}} = \frac{210}{1024} \quad p(7) = \frac{\binom{10}{7}}{2^{10}} = \frac{120}{1024} \quad p(8) = \frac{45}{1024} \quad p(9) = \frac{10}{1024} \quad p(10) = \frac{1}{1024}$$

La soluzione è la probabilità che testa esca più di 5 volte  $p(> 5) = \frac{386}{1024}$

$$\text{Soluzione 2: togliamo il caso di pareggio } 1 - p(5) = 1 - \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{772}{1024} \quad \text{la probabilità che esca di più testa è la stessa che esca di più croce, quindi sarà la metà } p(> 5) = \frac{772}{2 \cdot 1024} = \frac{386}{1024}$$

## LANCIO DI DADI

1) Calcola la probabilità al Risiko di vincere se attacco con 1 dado e l'avversario difende con 1 dado.

**Soluzione:** ci sono 15 casi favorevoli, cioè 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56 e i casi possibili sono 36. Quindi il risultato è  $p(\text{vittoria}) = \frac{15}{36} = 0,42 = 42\%$

2) Calcola la probabilità che tirando 3 dadi la somma sia almeno 16.

**Soluzione:** in 6 casi la somma è 16, cioè 466, 646, 664, 556, 565, 655. In 3 casi la somma è 17, cioè 566, 656, 665. In un caso la somma è 18, cioè 666. I casi favorevoli sono 10, i casi totali  $6^3 = 216$ , quindi il risultato è  $p(\geq 16) = \frac{10}{216} = 0,046 = 4,6\%$

## ESTRAZIONE DI PALLINE RIMESSE NELL'URNA

In un'urna ci sono 7 palline nere e 13 bianche. Viene estratta una pallina e rimessa nell'urna. Viene estratta un'altra pallina. Qual è la probabilità che siano entrambe nere?

$$\text{Soluzione: } p(2\text{nere}) = \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20} = \frac{49}{400} = 0,1225 = 12,25\%$$

## ESTRAZIONE DI PALLINE NON RIMESSE NELL'URNA

In un'urna ci sono  $n$  palline nere e 1 bianca. Si estraggono due palline. Qual è la probabilità che siano entrambe nere? Quante palline nere devono esserci per avere una probabilità 0,9?

$$\text{Soluzione: } p(2\text{nere}) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{Dall'equazione } \frac{n-1}{n+1} = 0,9 \text{ il risultato sarà } n = 19$$

## CARTE

1) Estraggo 3 carte da un mazzo di 52 carte da poker. Qual è la probabilità di estrarre 3 figure?

$$\text{Soluzione: le figure sono J,Q,K, sono 12, quindi } p(3\text{figure}) = \frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{10}{50} = \frac{33}{3315} = 0,01 = 1\%$$

2) Estraggo 3 carte da un mazzo di 52 carte da poker. Qual è la probabilità di estrarre almeno 2 figure?

$$\text{Soluzione: } p(\geq 2\text{figure}) = p(2\text{figure}) + p(3\text{figure}) \quad \text{Calcoliamo } p(2\text{figure}) = \frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{40}{50} \cdot 3, \text{ dove 40 sono le non figure e 3 sono le combinazioni figura | figura | non figura. } p = \frac{33+396}{3315} = 13\%$$

## TEST CON DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

1) In un test ci sono 10 domande e per ogni domanda 2 possibili risposte. Per passare il test devo rispondere a bene a 9 domande. Qual è la probabilità di passare il test rispondendo a caso?

$$\text{Soluzione: } p(\geq 9) = p(9) + p(10) \quad \text{La probabilità di 10 risposte esatte è } p(10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} = 0,1\%$$

mentre la probabilità di 9 risposte esatte e una sbagliata è (come le monete)  $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \binom{10}{9} = \frac{10}{1024}$ . Il risultato è  $p(\geq 9) = \frac{11}{1024} = 1\%$

2) In un test ci sono 10 domande e per ogni domanda 3 possibili risposte. Per passare il test devo rispondere a bene a 9 domande. Qual è la probabilità di passare il test rispondendo a caso?

**Soluzione:** La probabilità di 10 risposte esatte è  $p(10) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{59049}$  mentre la probabilità di 9 risposte esatte e una sbagliata è  $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \binom{10}{9} = \frac{20}{59049}$ . Quindi  $p(\geq 9) = \frac{21}{59049} = 0,04\%$

### INTERSEZIONE DI EVENTI INDIPENDENTI

Calcola la probabilità che in una classe di 30 alunni almeno 1 abbia la tua stessa data di compleanno

**Soluzione:** ogni studente deve avere un'altra data, quindi  $\left(\frac{364}{365}\right)^{30} = 0,92 = 92\%$

### EVENTO CONTRARIO

Calcola la probabilità che in una classe di 30 alunni almeno 2 abbiano la stessa data di compleanno.

**Soluzione:** sarà il contrario della probabilità che tutti abbiano il compleanno in giorni diversi.

$$p(\text{giorni diversi}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{336}{365} = \frac{365!}{365^{30}} = 0,29 \quad p(\text{almeno 2 stesso giorno}) = 0,71 = 71\%$$

### EVENTO CONDIZIONATO

1) Calcola la probabilità che tirando un dado esca 5, se già so che è uscito un numero dispari

**Soluzione:**  $p(5|\text{dispari}) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{3}$  (i casi possibili sono 1, 3, 5, il caso favorevole è 5)

2) Calcola la probabilità che tirando due dadi esca 7, se già so che la somma è maggiore di 5

**Soluzione:**  $p(7|>5) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6}{26}$

3) Una malattia colpisce 1 persona su 100. Un test dà esito positivo (cioè afferma che la persona è malata) nel 98% dei casi su persone effettivamente malate e nello 0,5% dei casi su persone che invece stanno bene. Una persona fa il test e l'esito è positivo. Che probabilità ha di essere davvero malata?

**Soluzione:**  $p(\text{malata}|\text{esito positivo}) = \frac{p(\text{malata ed esito positivo})}{p(\text{esito positivo})} = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{98}{100}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{0,5}{100}} = 66\%$ . Se l'esito è positivo, la probabilità che la persona sia malata è 66%.

4) Ho tirato 5 volte un dado e non è mai uscito il 6. Qual è la probabilità che uscirà al prossimo lancio?

**Soluzione:** il risultato sarà sempre  $\frac{1}{6}$ , perché non dipende da quello che succede prima.

5) Nel programma americano **Let's Make a Deal** ad un giocatore sono mostrate 3 porte. Dietro una porta c'è un'automobile, dietro le altre due ci sono due capre. Il giocatore sceglie una porta, ad esempio la 1, e il conduttore del gioco, che sa dov'è l'automobile, apre una porta dove c'è una capra, ad esempio la 3. Il conduttore chiede al giocatore se vuole cambiare porta. Conviene cambiare o non cambiare?

**Soluzione:** ci sono 4 casi: A) si cambia e si vince B) si cambia e si perde C) non si cambia e si vince D) non si cambia e si perde.

Caso A: si sceglie la porta sbagliata ( $p = \frac{2}{3}$ ) e poi la porta giusta ( $p = \frac{1}{2}$ ) e quindi  $p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Caso B: si sceglie la porta giusta ( $p = \frac{1}{3}$ ) e poi la porta sbagliata ( $p = \frac{1}{2}$ ) e quindi  $p = \frac{1}{6}$

Caso C: si sceglie la porta giusta ( $p = \frac{1}{3}$ ) e poi la porta giusta ( $p = \frac{1}{2}$ ) e quindi  $p = \frac{1}{6}$

Caso D: si sceglie la porta sbagliata ( $p = \frac{2}{3}$ ) e poi la porta sbagliata ( $p = \frac{1}{2}$ ) e quindi  $p = \frac{1}{3}$

La probabilità di cambiare e vincere è  $p(\text{vinco}|\text{cambio}) = \frac{p(\text{vinco e cambio})}{p(\text{cambio})} = \frac{p(A)}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Meglio cambiare, la probabilità è  $\frac{2}{3}$ .

## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

### A) Eventi **certi**:

- 1) Qual è la probabilità in un gruppo di 40000 persone, di trovare due persone nate lo stesso giorno? **1**
- 2) Qual è la probabilità che a Praga esistano almeno due persone con lo stesso numero di capelli? **1**

### B) Eventi **impossibili**:

- 1) Qual è la probabilità che tirando un dado esca il 7? **0**
- 2) Qual è la probabilità che una matita cada e rimanga sulla sua punta? **0**
- 3) Qual è la probabilità che due persone abbiano le stesse impronte digitali? **0**

### C) **Probabilità di un evento E**, se tutti i casi sono **ugualmente possibili**: $p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$

- 1) Qual è la probabilità che in un mazzo di poker di 52 carte venga estratto il 3?  $\frac{1}{13}$
- 2) Alla roulette ci sono 36 numeri più lo zero. Qual è la probabilità di estrarre un numero dispari?  $\frac{18}{37}$

### D) L'evento **contrario** $\bar{E}$ si dice **nonE**. Probabilità $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

- 1) Qual è la probabilità che tirando un dado non esca il 4?  $\frac{5}{6}$
- 2) Qual è la probabilità che Giovanni e Andrea non siano nati lo stesso mese?  $\frac{11}{12}$

### E) “**A e B**” significa che l'evento A e l'evento B avvengono insieme, si scrive $p(A \cap B)$ e si legge “**probabilità dell'intersezione di A e B**”.

- 1) Qual è la probabilità che tirando un dado esca un numero pari e maggiore di 3?  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- 2) Qual è la probabilità che un numero di 2 cifre sia pari e contenga il numero 7?  $\frac{5}{90}$
- 3) Qual è la probabilità  $p(A \cap \bar{A})$ ? **0**

### F) “**A oppure B**” significa che avviene l'evento A oppure l'evento B oppure entrambi, si scrive $p(A \cup B)$ e si legge “**probabilità di A unito a B**”.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- 1) Qual è la probabilità che tirando un dado esca un numero pari o un numero maggiore di 3?  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- 2) Qual è la probabilità che da un mazzo di poker si estraiga un 5 oppure una carta di quadri?  $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
- 3) Qual è la probabilità di  $p(A \cup \bar{A})$ ? **1**

### G) A e B sono eventi **incompatibili**, se non possono verificarsi contemporaneamente, e vale $p(A \cap B) = 0$ .

- 1) Qual è la probabilità che tirando un dado esca un numero pari e dispari? **0**
- 2) Qual è la probabilità che uno studente sia assente e venga interrogato? **0**

### H) La **probabilità condizionata** è: se è successo un fatto B, qual è la probabilità che sia successo anche il fatto A? Si scrive: $p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . Si legge: la probabilità di A se B è uguale alla probabilità di A e B diviso la probabilità di B.

- 1) Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di poker cuori, se ho già estratto un 4 di fiori?  $\frac{13}{51}$
- 2) Tiro un dado. Qual è la probabilità che sia uscito 5, se so che è uscito un numero dispari?  $\frac{1}{3}$
- 3) Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di poker cuori, se ho già estratto un 4 di cuori?  $\frac{12}{51} = \frac{4}{17}$
- 4) In un paese i biondi sono il 75% della popolazione. I biondi con gli occhi azzurri sono il 30% della popolazione. Qual è la probabilità tra i biondi di avere gli occhi azzurri?  $\frac{30}{75} = \frac{2}{5}$

# STATISTICA

Un insieme di **unità statistiche** sottoposte ad analisi statistica è una **popolazione statistica**. Di essa si studiano uno o più **caratteri**, che possono essere **quantitativi** (numeri) o **qualitativi**, **continui** o **discreti**. Se sono quantitativi, è possibile formare una tabella con il loro valore e la **frequenza**.

*Esempio: studio il carattere "voto in matematica" della popolazione statistica 4C. In totale ci sono 25 studenti. Ogni studente è una unità statistica. Si potrebbe avere la variabile statistica con la seguente distribuzione:*

voto	1	2	3	4	5
frequenza	2	10	6	6	1

**Moda  $M_o$**  è il valore più frequente

**Mediana  $M_e$**  è il valore centrale dei dati in ordine crescente. Se la popolazione è un numero pari, è la media tra i due valori centrali

**Media aritmetica  $\bar{x}$**   $\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_n}{n}$   $n$  il numero della popolazione statistica

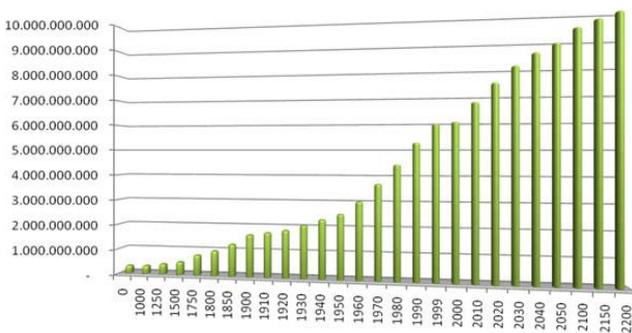
**Media armonica  $M_h$**   $M_h = \frac{n}{\sum_1^n \frac{1}{x_n}}$

**Q0, Q1, Q2, Q3, Q4** sono il **quartile** zero, il primo, il secondo, il terzo, il quarto quartile. È il dato per cui si ha rispettivamente 0%, 25%, 50%, 75%, 100% dei dati.

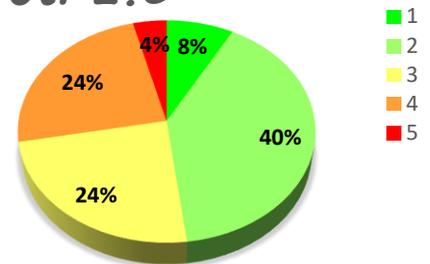
A sinistra c'è un **istogramma**

A destra un **grafico a torta**. Ogni fetta ha un angolo  $\alpha = \frac{f_i}{n} \cdot 360^\circ$

Popolazione mondiale



Voti 2.C



**Scarto quadratico medio o deviazione standard:**

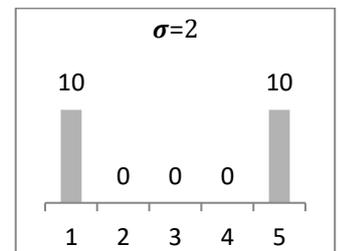
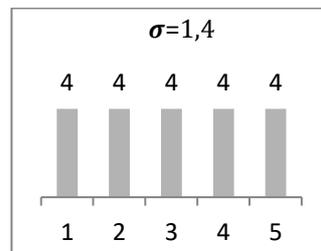
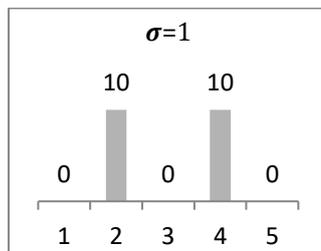
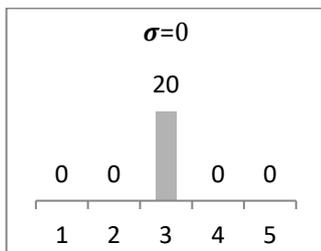
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$$

Indica più o meno **quanto sono distanti i dati dalla media**.

La maggior parte dei dati si trovano in questo intervallo:  $x \in [\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$

esempi voti con  $\sigma$  diversi



**Correlazione** tra due variabili

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Il valore della correlazione è sempre nell'intervallo  $[-1; 1]$

Esempio elaborato di statistica:



**ESERCIZI SU ESPONENZIALI E LOGARITMI**

Gli esercizi in **neretto** sono un po' più difficili, le soluzioni sono a pagina 38.

Trova **SENZA CALCOLATRICE** il risultato ( $a$  è sempre un numero positivo):

- |  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| 1) $2^5$   | 25) $\sqrt{3}^4$                               | 49) $3^2 - 2^2$  | 76) $\frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{10}}$                   |
| 2) $4^3$   | 26) $\sqrt{11}^0$                              | 50) $10^3 - 2^3$   | 77) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$           |
| 3) $10^7$  | 27) $\sqrt[3]{2}^6$                            | <b>51)</b> $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$       | 78) $0,1^{-3}$   |
| 4) $3^{-1}$  | <b>28)</b> $0,01^{-\frac{5}{2}}$               | <b>52)</b> $\left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ | <b>79)</b> $100^{-2} \cdot 0,1^{-4}$                   |
| 5) $7^0$   | 29) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$ | 53) $13^{13} \div 13^{12}$   | <b>80)</b> $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[3]{2}$              |
| 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$                      | 30) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$               | 54) $13^{13} \cdot 13^{-11}$   | 81) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$                   |
| 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$                   | 31) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$            | 55) $(2^3)^2$  | 82) $5^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{5}$                |
| 8) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$                   | 32) $(73 - 71)^5$                              | 56) $(10^2)^4$   | 83) $7^{\frac{7}{6}} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}$ |
| 9) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$                      | 33) $(1 + 1)^5$                                | 57) $(10^2)^{-4}$  | 84) $(3 - 1)^4$  |
| 10) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$                  | <b>34)</b> $(23 - 17 - 5)^9$                   | 58) $(10^8)^{\frac{1}{2}}$   | 85) $(5 - 2)^{-3}$                                     |
| 11) $4^{\frac{1}{2}}$                                | 35) $(-2)^4$                                   | 59) $(10^{10})^{-\frac{1}{2}}$   | 86) $8^{a+1} \div 8^a$                                 |
| 12) $4^{-\frac{1}{2}}$                               | 36) $(-2)^5$                                   | 60) $10^{15} \div 10^{10}$   | <b>87)</b> $\frac{4^{n^2}}{4^n}$                       |
| 13) $4^{\frac{3}{2}}$                                | 37) $(-2)^{-2}$                                | 61) $10^2 \cdot 10^3$  | 88) $7^{2a} \div 7^a$                                  |
| <b>14)</b> $4^{-\frac{3}{2}}$                        | 38) $(-2)^{-3}$                                | 62) $(10^2)^3$   | 89) $5^a \cdot 5^2$                                    |
| 15) $100^2$  | 39) $\frac{5^5}{5^4}$                          | <b>63)</b> $a^5 \div a^{-3}$   | 90) $10^8 \div 5^7$                                    |
| 16) $1000^2$   | 40) $\frac{7^5}{7^3}$                          | <b>64)</b> $\frac{\sqrt{a^5}}{a^{\frac{3}{2}}} \cdot a^0$                      | <b>91)</b> $\frac{6^8}{3^7 \cdot 2^6}$                 |
| 17) $1000^{\frac{1}{3}}$                             | 41) $\frac{7^5}{49^2}$                         | 65) $a^{-4} \div a^4$  | <b>92)</b> $\frac{16^4}{8^3 \cdot 4^2 \cdot 2}$        |
| 18) $1000^{\frac{2}{3}}$                             | <b>42)</b> $(2\sqrt{3})^2$                     | 66) $4^5 \div 2^5$   | 93) $4^3 \cdot 4^0$                                    |
| 19) $10^{-2}$  | 43) $(3\sqrt{2})^2$                            | 67) $12^6 \div 6^6$  | 94) $27^{\frac{2}{3}}$                                 |
| 20) $0,1^2$  | 44) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$        | 68) $12^4 \div 2^8$  | 95) $16^{\frac{5}{4}}$                                 |
| 21) $0,1^{-2}$                                       | 45) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$        | 69) $100^5 \div 10^8$  | 96) $4^{\frac{5}{2}}$                                  |
| 22) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$         | 46) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$     | 70) $10^3 \cdot 0,1^3$   | 97) $25^{\frac{3}{2}}$                                 |
| <b>23)</b> $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$ | 47) $\frac{2^5}{2^4}$                          | <b>71)</b> $10^4 \cdot 0,1^6$  | 98) $0,25^{\frac{1}{2}}$                               |
| 24) $\sqrt{3^4}$                                     | 48) $2^5 - 2^4$                                | <b>72)</b> $100^4 \cdot 0,1^6$   | <b>99)</b> $\sqrt{0,0001}$                             |
|  |  | 73) $\sqrt{1000} \cdot \sqrt{10}$  | <b>100)</b> $2 \cdot 4^{\frac{3}{2}} =$                |
|  |  | 74) $\sqrt{1000} \div \sqrt{10}$   |  |
|  |  | 75) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{27}}$                                |  |

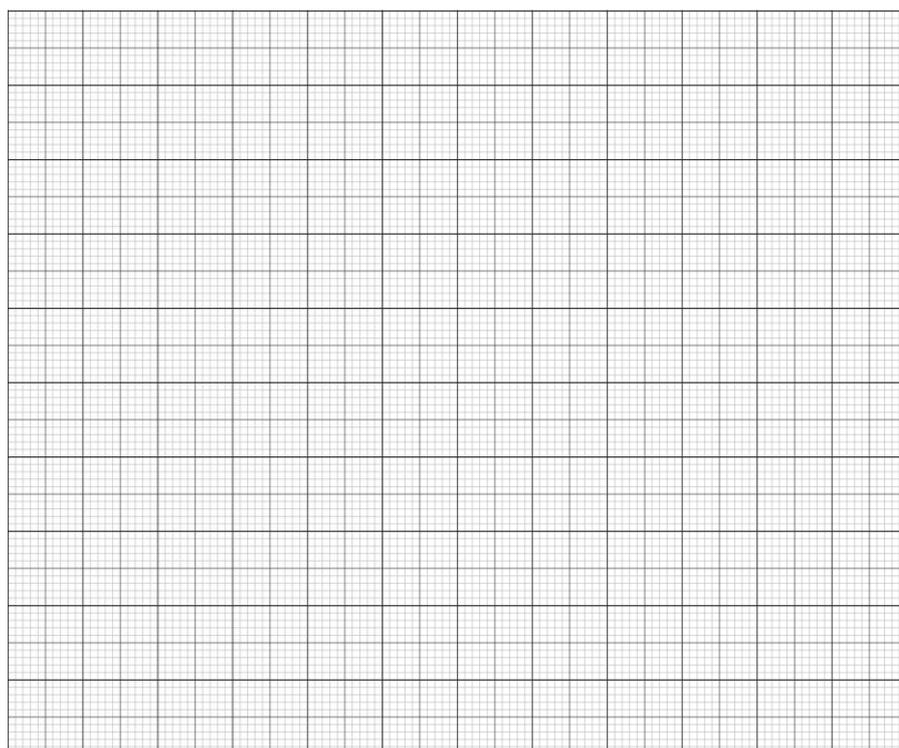
Scrivi questi numeri come potenze di 10 (ad esempio  $\sqrt{1000} = 10^{\frac{3}{2}}$ )

- |                        |                            |                     |                    |
|------------------------|----------------------------|---------------------|--------------------|
| 101) 100               | 104) $\frac{1}{1000}$      | 106) $10\sqrt{10}$  | 109) $1000^5$      |
| 102) 100 000           | 105) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ | 107) 0,001          | 110) $100^3$       |
| 103) $\sqrt{100\ 000}$ |                            | 108) $\frac{1}{10}$ | 111) $0,0001^{-6}$ |

112) Completa la tabella:

Disegna i 13 punti della tabella:

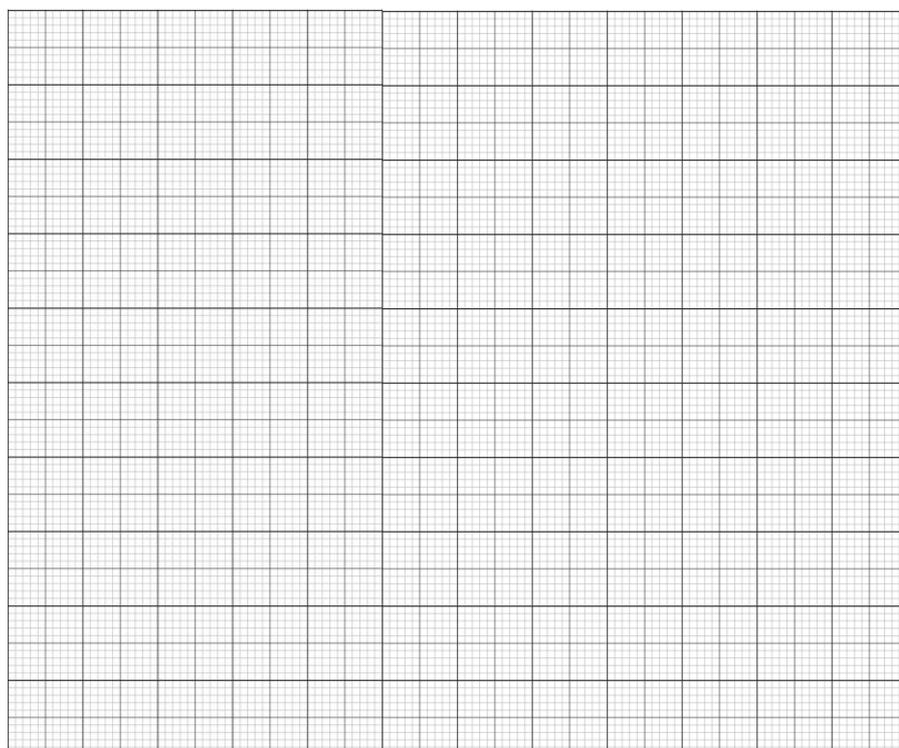
$x$	$y = 2^x$
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
-0,5	
-1	
-1,5	
-2	
-2,5	
-3	



113) Completa la tabella con l'aiuto della calcolatrice:

Disegna i 13 punti della tabella:

$x$	$y = 1,5^x$
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
-0,5	
-1	
-1,5	
-2	
-2,5	
-3	

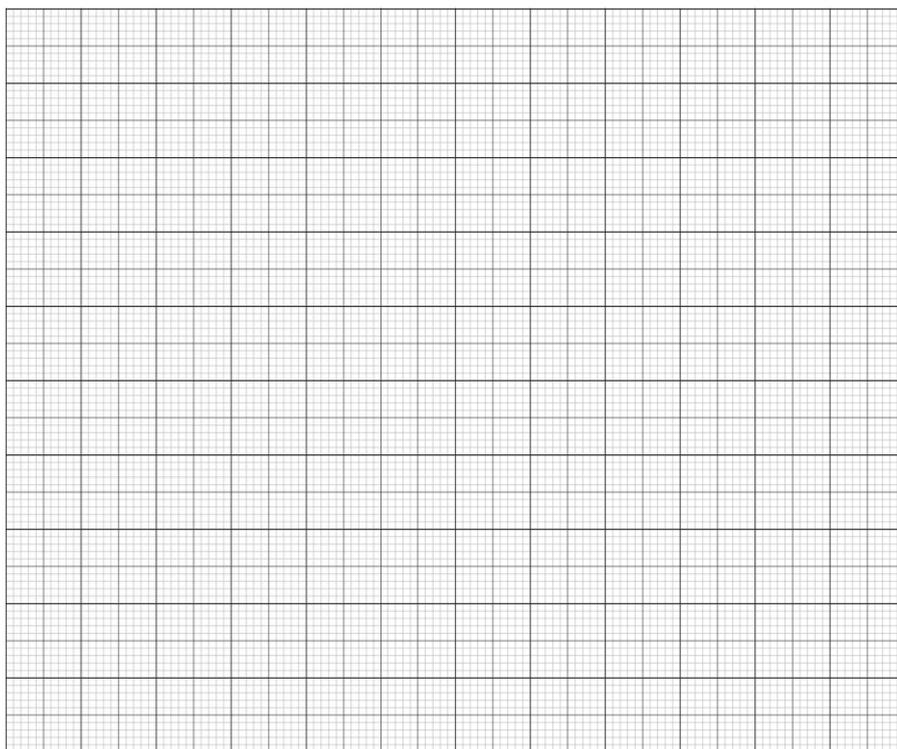


# ESPONENZIALI E LOGARITMI

114) Completa la tabella con l'aiuto della calcolatrice:

Disegna i 13 punti della tabella:

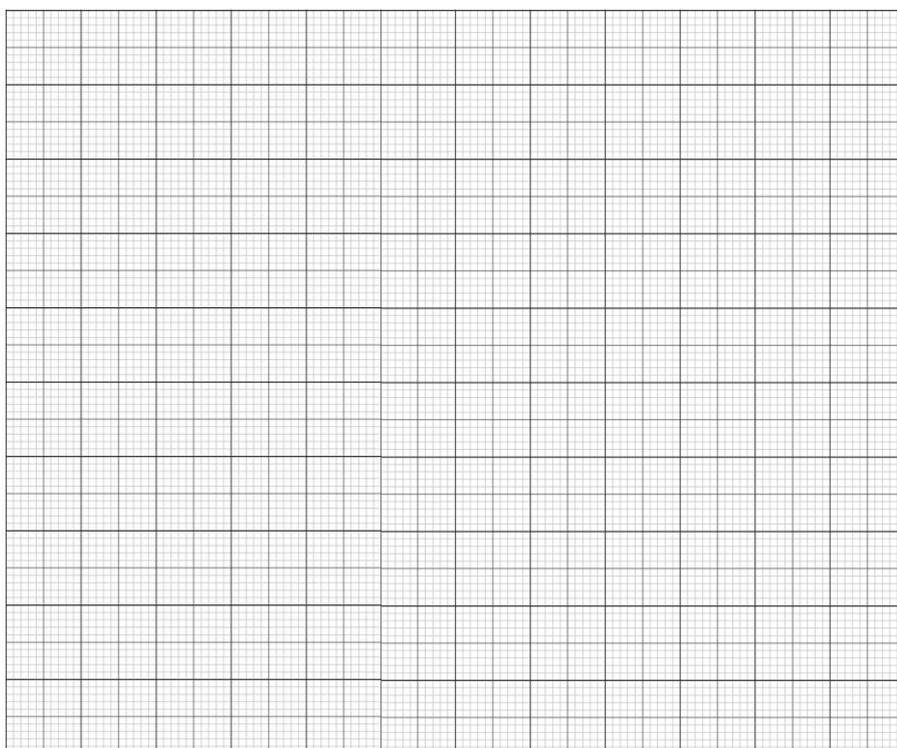
$x$	$y = 0,5^x$
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
-0,5	
-1	
-1,5	
-2	
-2,5	
-3	



115) Completa la tabella con l'aiuto della calcolatrice:

Disegna i 13 punti della tabella:

$x$	$y = 0,7^x$
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
-0,5	
-1	
-1,5	
-2	
-2,5	
-3	



Scrivi questi numeri come potenze di 2 (ad esempio  $\sqrt{32} = 2^{\frac{5}{2}}$ )

- |                           |                    |                            |                                      |
|---------------------------|--------------------|----------------------------|--------------------------------------|
| 116) 16                   | 121) $2\sqrt{2}$   | 126) $\sqrt{32}$           | 131) 1                               |
| 117) 8                    | 122) 64            | 127) $4^{-3}$              | 132) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ |
| 118) $\sqrt{8}$           | 123) $\frac{1}{2}$ | 128) $\sqrt{\frac{1}{32}}$ | 133) $\frac{1}{2^5}$                 |
| 119) $\frac{1}{8}$        | 124) $4^5$         | 129) $8\sqrt{2}$           | 134) $8^5$                           |
| 120) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 125) $8^3$         | 130) $2\sqrt{8}$           | 135) $8^5 \cdot 4^3$                 |

Risolvi queste equazioni SENZA CALCOLATRICE (tranne l'ultima):

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 136) $2^x = 4$                                  | 156) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$    | 176) $0,0001^x = 0,01$                            | 196) $\frac{2^x}{8} = 16$                         |
| 137) $3^x = 9$                                  | 157) $2^{-x} = \frac{1}{4}$              | 177) $0,0001^x = 10$                              | <b>197) <math>\frac{4^x}{2} = 32</math></b>       |
| 138) $5^x = 5$                                  | <b>158) <math>2^{-x} - 4 = 0</math></b>  | 178) $0,0001^x = 100$                             | 198) $\frac{6^x}{3} - 12 = 0$                     |
| 139) $4^x = 1$                                  | <b>159) <math>5^x + 5 = 0</math></b>     | <b>179) <math>0,0001^x = \sqrt{10}</math></b>     | <b>199) <math>\frac{10^x}{0,01} = 1000</math></b> |
| 140) $10^x = 1000$                              | 160) $2^{2-x} = 4$                       | 180) $2^{-x} = -1$                                | 200) $4^{x+3} = 8$                                |
| 141) $10^{x+1} = 100$                           | 161) $6^{2-x} = 36$                      | 181) $8^{-x} - 2 = 0$                             | 201) $81^x - 3 = 0$                               |
| 142) $3^{x-1} = 27$                             | 162) $10^{-x} = 0,0001$                  | <b>182) <math>4^{x^2} - 4 = 0</math></b>          | 202) $32^x = 4$                                   |
| 143) $3^{2x} = 81$                              | 163) $10^{3-x} = 0,0001$                 | 183) $2^{x-2} - 1 = 0$                            | 203) $32^{5x} = 4$                                |
| 144) $9^x = 81$                                 | 164) $100^x - 10 = 0$                    | 184) $3^{x^2} = 81$                               | 204) $32^{5x-4} = 4$                              |
| <b>145) <math>2^{3x} = 64</math></b>            | 165) $100^x = 1$                         | <b>185) <math>3^{x^2} - 9 = 0</math></b>          | 205) $32^{5x-4} = \frac{1}{32}$                   |
| 146) $8^x = 64$                                 | 166) $100^x = 0,01$                      | 186) $4^x = \frac{1}{2}$                          | <b>206) <math>32^{5x-4} = \frac{1}{2}</math></b>  |
| <b>147) <math>2^{3x-1} = 4</math></b>           | <b>167) <math>100^x - 0,1 = 0</math></b> | <b>187) <math>4^x - 0,5 = 0</math></b>            | 207) $6^x \cdot 36^x - 1 = 0$                     |
| 148) $4^x = 2$                                  | 168) $27^x = 3$                          | <b>188) <math>4^x = \frac{1}{\sqrt{2}}</math></b> | <b>208) <math>6^x \cdot 36^x = 6</math></b>       |
| 149) $49^x = 7$                                 | <b>169) <math>27^x - 9 = 0</math></b>    | 189) $4^{x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$           | 209) $4 \cdot \sqrt{2}^x - 8 = 0$                 |
| 150) $10^x = 0,1$                               | 170) $27^x = 81$                         | 190) $4^{2x} = \frac{1}{16}$                      | <b>210) <math>25 \cdot \sqrt{5}^x = 5</math></b>  |
| 151) $10^x = 0,0001$                            | 171) $27^x - \frac{1}{3} = 0$            | 191) $10 \cdot 10^x = 1000$                       | <b>211) <math>3 \cdot 2^x = 24</math></b>         |
| 152) $3^x - \frac{1}{3} = 0$                    | 172) $4^x = 8$                           | 192) $2 \cdot 2^x - 16 = 0$                       | 212) $64^x - 32 = 0$                              |
| 153) $3^x = \frac{1}{9}$                        | 173) $\sqrt{2}^x - 4 = 0$                | 193) $9 \cdot 3^x = 9$                            | 213) $4^{3x} + 4 = 0$                             |
| 154) $2^x - \frac{1}{16} = 0$                   | 174) $\sqrt{2}^x = 8$                    | 194) $9 \cdot 3^x = 81$                           | <b>214) <math>2^x = 10</math></b>                 |
| 155) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$ | 175) $\sqrt{10}^{2x} = 100$              | 195) $8 \cdot 2^x - 32 = 0$                       |   |

Nella banca XYZ i risparmi di una persona raddoppiano ogni dieci anni con interessi composti annuali.

- 215) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, quanti soldi avrò nel 2010?  
 216) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, quanti soldi avrò nel 2020?  
 217) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, quanti soldi avrò nel 2050?

## ESPONENZIALI E LOGARITMI

- 218) Se deposito 5 milioni di euro nel 2000, quanti soldi avrò nel 2040?  
 219) Se deposito 7 milioni di euro nel 2000, quanti soldi avrò nel 2030?  
 220) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, quanti soldi avrò nel 2100?  
**221) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, quanti soldi avrò nel 2001?**  
 222) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, in che anno avrò 4 milioni?  
 223) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, in che anno avrò 64 milioni?  
 224) Se deposito 6 milioni di euro nel 2000, in che anno avrò 96 milioni?  
 225) Se deposito 12 milioni di euro nel 2000, in che anno avrò 96 milioni?  
**226) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, in che anno avrò 10 milioni?**  
 227) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, in che anno avrò 20 milioni?  
 228) Se deposito 1 milione di euro nel 2000, in che anno avrò 100 milioni?

Durante un esperimento in un laboratorio il numero di batteri si moltiplica di 10 volte ogni ora.

- 229) Se ci sono 500 batteri, quanti batteri ci saranno dopo 4 ore?  
 230) Se ci sono 350 batteri, quanti batteri ci saranno dopo 3 ore?  
 231) Se ci sono 4500 batteri, quanti batteri c'erano due ore prima?  
 232) Tra 3 ore ci saranno 1.000.000 di batteri. Quanti batteri ci sono adesso?  
**233) Se adesso ci sono 1000 batteri, quanti batteri ci saranno tra 30 minuti?**  
 234) Se adesso ci sono 1000 batteri, quanti batteri ci saranno tra 20 minuti?  
 235) Se adesso ci sono 1000 batteri, quanti batteri ci saranno tra 1 minuto?  
**236) Se adesso ci sono 1000 batteri, tra quanti minuti ci saranno 2000 batteri?**  
 237) Se adesso ci sono 1000 batteri, tra quanti minuti ci saranno 5000 batteri?

Nel pianoforte ci sono 88 tasti, più di 7 ottave. Per ogni ottava la frequenza delle note raddoppia e il tasto 1 ha frequenza 27,5 Hz. Quindi il 13 ha frequenza 55 Hz, il 25 ha frequenza 110 Hz e così via.

238) Trova la frequenza di tutti i LA

**239) Trova la frequenza del tasto colorato**

240) Trova la frequenza di tutti i DO

**241) Trova la legge matematica della frequenza dei tasti di un pianoforte**



Risolvi SENZA CALCOLATRICE questi logaritmi:

- |                                     |                                      |  |   |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--|---|
| 242) $\log 10$                      | 250) $\log_2 \frac{1}{8}$            | <b>258) <math>\log_8 16</math></b>       | <b>266) <math>\log_{\frac{1}{2}} 4</math></b> |
| 243) $\log 1000$                    | 251) $\log_2 1$                      | 259) $\log \sqrt{10}$                    | 267) $\log_{\frac{1}{2}} 1$                   |
| 244) $\log 100$                     | <b>252) <math>\log_2 (-2)</math></b> | 260) $\log \sqrt{1000}$                  | 268) $\log_{\frac{1}{2}} 8$                   |
| 245) $\log 0,1$                     | 253) $\log_4 4$                      | 261) $\log \sqrt[3]{100}$                | 269) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$            |
| 246) $\log 1$                       | 254) $\log_4 16$                     | 262) $\log_2 \sqrt{2}$                   | 270) $\log_8 4$                               |
| 247) $\log_2 8$                     | 255) $\log_4 2$                      | <b>263) <math>\log \sqrt{0,1}</math></b> | 271) $\log_4 8$                               |
| 248) $\log_2 64$                    | <b>256) <math>\log_8 2</math></b>    | 264) $\log_3 81$                         | 272) $\log_3 27$                              |
| <b>249) <math>\log_2 0,5</math></b> | 257) $\log_8 8$                      | 265) $\log_{\frac{1}{2}} 2$              |   |

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| 273) $\log_{27} 3$                        | 278) $\log_3 9\sqrt{3}$                             | 282) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{4}$                   | <b>286) <math>\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}</math></b>                                |
| 274) $\log_{16} 4$                        | <b>279) <math>\log_4 \sqrt{8}</math></b>            | 283) $\log_3 27$                                   | 287) $\log_{25} 5$  |
| 275) $\log_4 16$                          | <b>280) <math>\log \frac{100}{\sqrt{10}}</math></b> | 284) $\log_{\frac{1}{3}} 27$                       | <b>288) <math>\log_7 \left( \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[4]{7}}{\sqrt[3]{7}} \right)</math></b> |
| <b>276) <math>\log_2 2\sqrt{2}</math></b> | 281) $\log \frac{1}{\sqrt{10}}$                     | <b>285) <math>\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}</math></b> |   |
| 277) $\log_3 3\sqrt{3}$                   |   |  |   |

Scrivi come un unico logaritmo ( $a, b, c, x$  sono sempre positivi) e quando è possibile trova il risultato:

- |  |   |
|--|---|
| 289) $\log 2 + \log 5$                     | 307) $\frac{1}{2} \log_5 100 - \log_5 50$       |
| 290) $\log 3 + \log 2$                     | 308) $\log 0,5 - \log \frac{1}{2}$              |
| 291) $\log 8 - \log 2$                     | 309) $\log 200 - \log \frac{1}{2}$              |
| 292) $\log a + \log b$                     | 310) $\log \frac{1}{5} - \log 5 - \log 4$       |
| 293) $\log a - \log b$                     | 311) $\log 2 - \log 3 + \log 6$                 |
| 294) $2 \log 5 + \log 4$                   | 312) $\log x + \log(x - 1) - 2 \log(x^2 + 1)$   |
| 295) $\log_2 7 + \log_2 5$                 | 313) $\log 2x + 2 \log(x + 1) - \log x$         |
| 296) $\log_2 24 - \log_2 3$                | 314) $\log 0,2 + \log 0,05$                     |
| 297) $\log_6 18 + \log_6 2$                | 315) $\frac{1}{2} \log 40000 + \log 50$         |
| 298) $3 \log 20 - \log 8$                  | 316) $\frac{1}{2} \log 0,04 + \log 50$          |
| 299) $\log 80 - 3 \log 2$                  | 317) $2 \log_{12} 2 + \log_{12} 3$              |
| 300) $2 \log 30 + \log 4 - 2 \log 6$       | 318) $2 \log_{12} 6 - \log_{12} 3$              |
| 301) $4 \log_6 4 + \log_6 81 - 4 \log_6 2$ | 319) $\frac{2}{3} \log 8 + \frac{3}{2} \log 25$ |
| 302) $2 \log a + 3 \log b - 5 \log c$      | 320) $\log a - \log b + \log c - \log 7$        |
| 303) $-\log a + \log b + 2 \log c$         | 321) $\log \frac{250}{9} - 2 \log \frac{5}{3}$  |
| 304) $\frac{1}{2} \log a + \log b$         |   |
| 305) $\frac{1}{2} \log 4 + \log 5$         |   |
| 306) $\log 0,001 + \log 5000$              |   |

Scrivi come somma e differenza di logaritmi togliendo potenze e radici ( $a, b, c$  sono sempre positivi):

- |                                    |                                   |  |
|------------------------------------|-----------------------------------|--|
| 322) $\log(ab^2)$                  | 327) $\log \frac{a\sqrt{a}}{4b}$  | 331) $\log(c^a \sqrt{b})$                      |
| 323) $\log \frac{ab}{10c}$         | 328) $\log \sqrt{a\sqrt{b}}$      | 332) $\log \frac{a^3 \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^8}}$ |
| 324) $\log \frac{10^a \cdot b}{c}$ | 329) $\log \frac{a^4 10^c}{3b^5}$ | 333) $\log \frac{2 \cdot 10^a}{5^b}$           |
| 325) $\log(\sqrt[3]{b} \sqrt{a})$  | 330) $\log \frac{1}{abc^2}$       | 334) $\log \frac{4\sqrt{a}}{b^2 c^3}$          |
| 326) $\log \frac{1}{5ab}$          |                                   |  |

Problemi SENZA CALCOLATRICE:

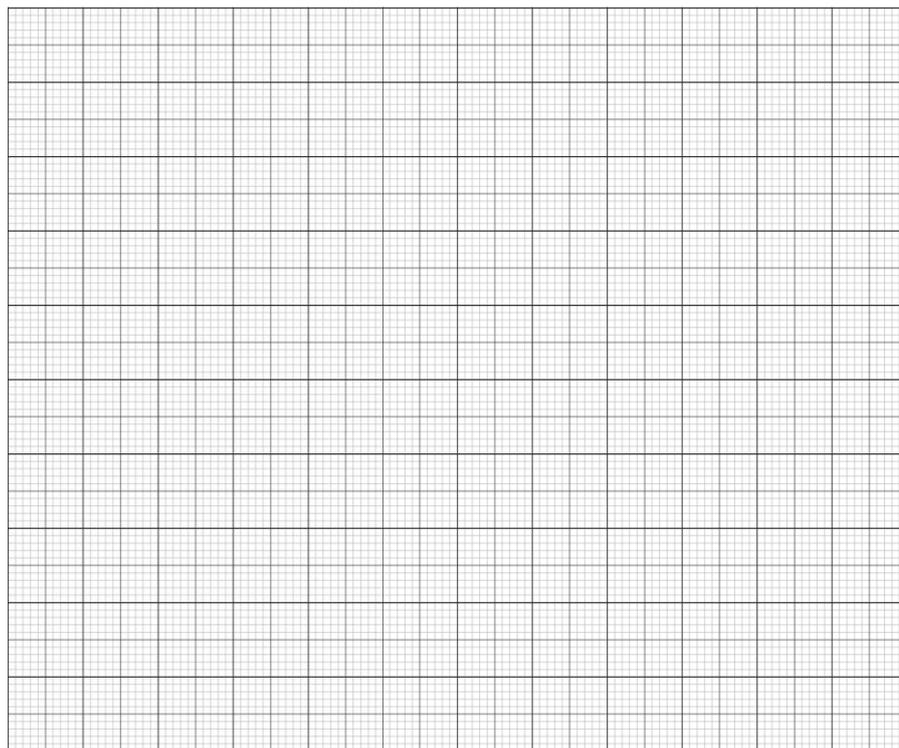
- |  |   |   |                                    |   |
|--|---|---|------------------------------------|---|
| 335) Se $\log 2 = 0,3$ allora  | $\log 200 = \dots \dots$                                    | $\log 2000 = \dots \dots$                             | $\log 20 = \dots \dots$            | $\log 0,2 = \dots \dots$                    |
| 336) Se $\log 4 = 0,6$ allora  | $\log 40 = \dots \dots$                                     | $\log 400 = \dots \dots$                              | $\log 4000 = \dots \dots$          | <b><math>\log 0,4 = \dots \dots</math></b>  |
| 337) Se $\log 4 = 0,6$ allora  | $\log \frac{1}{4} = \dots \dots$                            | $\log 0,004 = \dots \dots$                            | $\log 16 = \dots \dots$            | <b><math>\log 2 = \dots \dots</math></b>    |
| 338) Se $\log 2 = 0,3$ allora  | $\log 8 = \dots \dots$                                      | $\log 32 = \dots \dots$                               | $\log 40 = \dots \dots$            | <b><math>\log 5 = \dots \dots</math></b>    |
| 339) Se $\log 5 = 0,7$ allora  | $\log 50 = \dots \dots$                                     | $\log 0,005 = \dots \dots$                            | $\log \frac{1}{5} = \dots \dots$   | $\log \frac{1}{25} = \dots \dots$           |
| 340) Se $\log 3 = 0,5$ allora  | $\log \frac{1}{3} = \dots \dots$                            | $\log 0,003 = \dots \dots$                            | $\log \frac{1}{300} = \dots \dots$ | <b><math>\log_3 10 = \dots \dots</math></b> |
| <b>341) <math>(\log_a b) \cdot (\log_b a) = \dots \dots</math></b>     | $\frac{\log_a b}{\log_{\frac{1}{a}} b} = \dots \dots$       | $\frac{\log_a b}{\log_{\frac{1}{a}} b} = \dots \dots$ |                                    |   |
| <b>342) <math>\frac{\log_a 16}{\log_a 2} = \dots \dots</math></b>      | $\frac{\log_3 x^4}{\log_3 \sqrt{x}} = \dots \dots$          | $(\log_{10} 2) \cdot (\log_2 10) = \dots \dots$       |                                    |   |
| 343) $\frac{1}{2} \log \frac{250}{9} - \log \frac{5}{3} = \dots \dots$ | $\log_{\frac{2}{3}} 5 + \log_{\frac{3}{2}} 5 = \dots \dots$ | $\frac{\log_2 5}{\log_{0,5} 5} =$                     |                                    |   |

# ESPONENZIALI E LOGARITMI

344) Completa la tabella con l'aiuto della calcolatrice:

Disegna i punti della tabella:

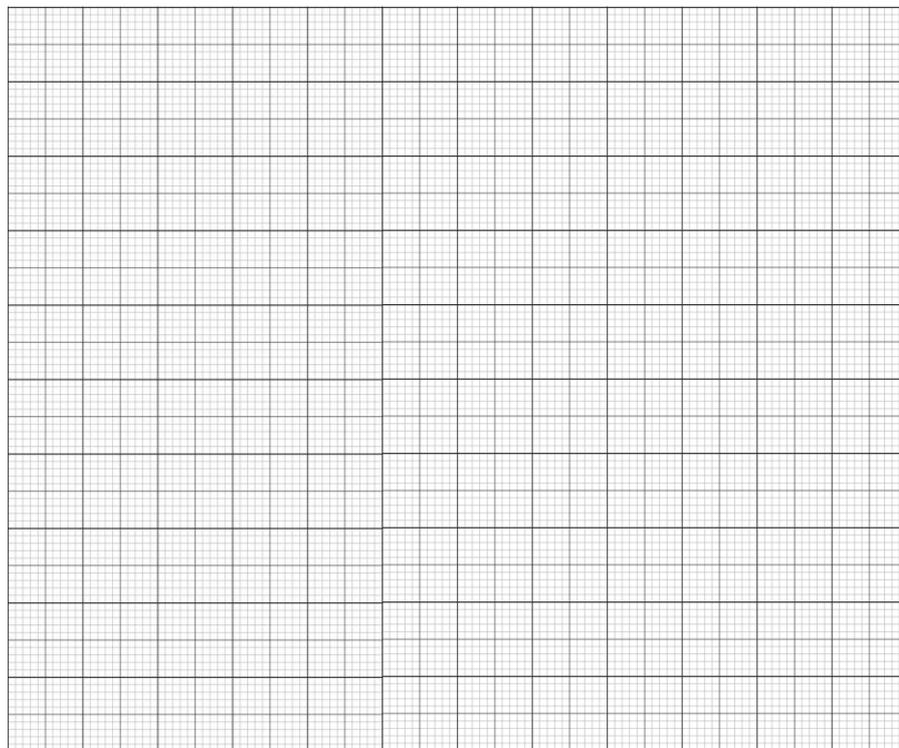
$x$	$y = \log_2 x$
0	
0,1	
0,2	
0,5	
1	
$\sqrt{2}$	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
-1	
-2	
-3	



345) Completa la tabella con l'aiuto della calcolatrice:

Disegna i punti della tabella:

$x$	$y = \log_{0,5} x$
0	
0,1	
0,2	
0,5	
1	
$\sqrt{2}$	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
-8	



Problemi CON la calcolatrice:

- 346) Secondo Malthus la popolazione mondiale raddoppia ogni 25 anni. Se oggi ci sono 7 miliardi di persone, in che anno sarebbero esistite solo due persone?
- 347) Secondo la teoria di Malthus, quante persone c'erano nel 1920?
- 348) Secondo la teoria di Malthus, quante persone c'erano nel 1900?

Il  $C_{14}$  è un tipo di carbonio che rimane costante in un essere vivente. Quando muore il  $C_{14}$  si dimezza ogni 5000 anni. In questo modo si analizzano i fossili.

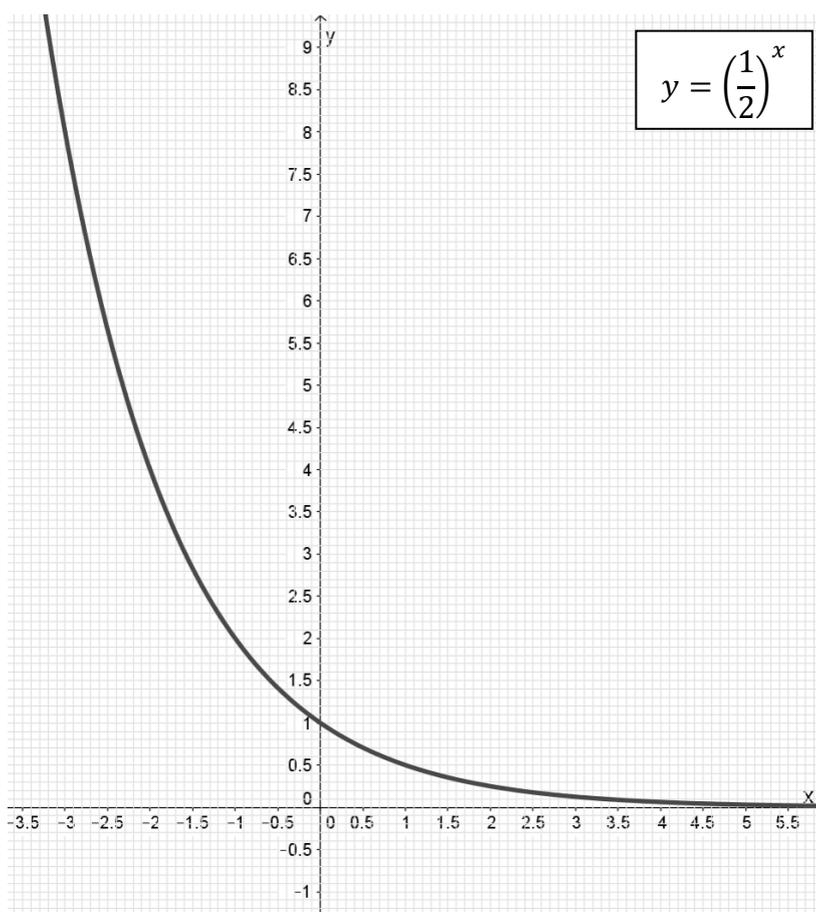
- 349) Se un fossile ha solo  $\frac{1}{8}$  di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?
- 350) Se il fossile ha solo metà di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?
- 351) Se il fossile ha solo  $\frac{1}{32}$  di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?
- 352) Se il fossile ha solo  $\frac{1}{5}$  di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?
- 353) Se il fossile ha solo  $\frac{1}{10}$  di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?
- 354) Se il fossile ha solo  $\frac{1}{20}$  di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?
- 355) Se il fossile ha solo  $\frac{1}{100}$  di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?
- 356) Se il fossile ha solo  $\frac{1}{1000}$  di atomi  $C_{14}$  rispetto alla normalità, quanto è vecchio?

357) Secondo il disegno di pagina 12 ogni nota  $x$  ha una frequenza  $y = 27,5 \cdot 2^{\frac{x-1}{12}}$  Hz. Trova le note di frequenza 440 Hz e 10.000Hz

**358) L'orecchio umano sente dai 20 ai 20.000 Hz. Che note sono?**

359) Risolvi queste disequazioni:

- |  |  |
|--|--|
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2$        | $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$           |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1$        | $\left(\frac{1}{2}\right)^x > -1$          |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8$        |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 3$           | $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2}$ |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0,2$      | $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0,1$         |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 5$        | $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{2}$    |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 10$          | $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \sqrt{10}$   |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq -2$       | $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \leq 0$    |



## ESPONENZIALI E LOGARITMI

360) Risolvi queste disequazioni:

$$\log_2 x > 1 \quad \log_2 x > 0$$

$$\log_2 x \geq 2 \quad \log_2 x < 2$$

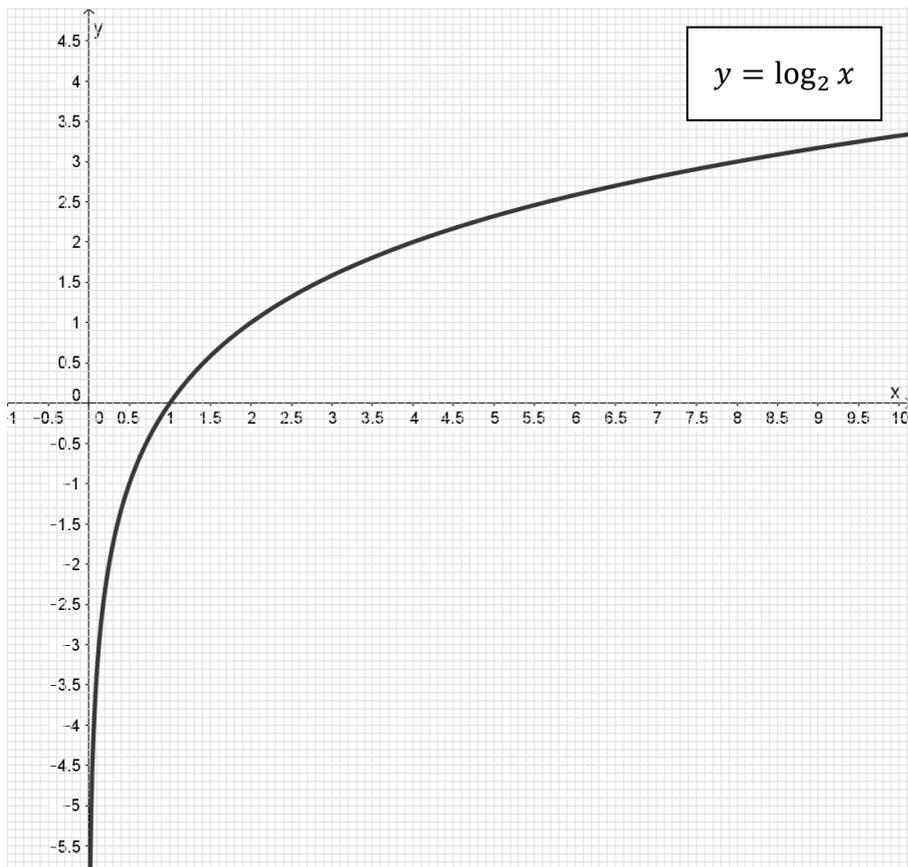
$$\log_2 x \leq -1 \quad \log_2 x > -2$$

$$\log_2 x < 1,5 \quad \log_2 x \geq -0,5$$

$$\log_2 x \leq 3 \quad \log_2 x > 4$$

$$\log_2 x > 2,5 \quad \log_2 x \leq 0$$

$$\log_2 x + 3 \geq 0 \quad \log_2 x - 3 < 0$$



Risolvi queste equazioni SENZA CALCOLATRICE:

$$361) \log x = 0$$

$$369) \log x = -1$$

$$377) \log_9 x + \frac{1}{2} = 0$$

$$385) \log_3(x + 2) = 3$$

$$362) \log x = 1$$

$$370) \log x + 3 = 0$$

$$378) \log(x + 1) = 2$$

$$386) \log x + \log 2 = 1$$

$$363) \log x = 3$$

$$371) \log_2 x = -2$$

$$379) \log(x - 1) = 2$$

$$387) \log_{\frac{1}{2}} x - 3 = 0$$

$$364) \log_3 x = 3$$

$$372) \log_2 x + 1 = 0$$

$$380) \log(2x) = 2$$

$$388) \log_{\frac{2}{3}} x = 2$$

$$365) \log_2 x = 5$$

$$373) \log_5 x = 0$$

$$381) \log(3x + 1) = 2$$

$$389) \log_{\frac{2}{3}} x + 1 = 0$$

$$366) \log_5 x = 1$$

$$374) \log_9 x = 2$$

$$382) \log(-x) = 2$$

$$390) \log x^2 - 2 = 0$$

$$367) \log_7 x = 2$$

$$375) \log_9 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$383) \log(-x) = -2$$

$$391) \log_4 x = -\frac{1}{2}$$

$$368) \log_3 x - 2 = 0$$

$$376) \log_9 x = -2$$

$$384) \log(-x + 2) = 0$$

Risolvi queste equazioni e le disequazioni trovando gli intervalli giusti:

$$392) 2^x > 4$$

$$402) 10^x > \sqrt{10}$$

$$410) \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8$$

$$418) 10^x < 5$$

$$393) 3^x > 27$$

$$403) 4^x > 2$$

$$411) \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} > 2$$

$$419) 0,5^x > 4$$

$$394) 3^x \leq 1$$

$$404) 4^x < 8$$

$$412) \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$$

$$420) 0,5^x = 5$$

$$395) 4^x \geq 16$$

$$405) 8^x < 4$$

$$413) \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2}$$

$$421) 0,5^x < 1$$

$$396) 4^x < 2$$

$$406) \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$$

$$414) 2^x = 10$$

$$422) \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 1$$

$$397) 4^x > 0$$

$$407) \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$$

$$415) 2^x > 10$$

$$423) \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq 1$$

$$398) 5^x < 1$$

$$408) \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$$

$$416) 2^x \leq 5$$

$$424) \left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$$

$$399) 5^x < -1$$

$$409) \left(\frac{1}{2}\right)^x > -1$$

$$417) 10^x = 2$$

$$425) \left(\frac{4}{3}\right)^x < 0$$

$$400) 10^x > 0,01$$

$$401) 10^x < 0,1$$

426)  $1, 1^x > -1$

427)  $\sqrt{2}^x < 1$

428)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}$

429)  $216 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 8$

430)  $216 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < 8$

431)  $20 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 180$

432)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \frac{1}{16}$

433)  $\log x < 2$

434)  $\log x > 0$

435)  $\log(x-2) < 0$

436)  $\log x < -1$

437)  $\log x > -2$

438)  $\log x = \frac{1}{2}$

439)  $\log x < \frac{1}{2}$

440)  $\log_4 x > 2$

441)  $\log_9 x = 3$

442)  $\log_9 x \leq 3$

443)  $\log \frac{1}{x} = 0$

444)  $\log \frac{1}{x} \leq 0$

445)  $\log \frac{1}{x} > 0$

446)  $\log(-x) > 0$

447)  $\log(-x) \leq 1$

448)  $\log \frac{1}{x} < 1$

449)  $\log \frac{1}{x} \geq 2$

450)  $\log \frac{1}{x} < -1$

451)  $\log 2x > 2$

452)  $\log 5x < 1$

453)  $\log x < -4$

454)  $\log x \geq -1$

455)  $2 \log x > 2$

456)  $\log x^2 > 2$

457)  $\log_2 x > 0$

458)  $\log_2 x < 1$

459)  $\log_2 x > \frac{1}{2}$

460)  $\log_2 x = \frac{3}{2}$

461)  $\log_2 x \leq \frac{3}{2}$

462)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$

463)  $\log_{\frac{1}{2}} x < 4$

464)  $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 3$

465)  $\log(-x) > 5$

466)  $\log x < 2$

467)  $\log x^2 > 4$

468)  $\log x^2 \leq 4$

469)  $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

470)  $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$

471)  $\log_{\frac{1}{2}} x < -2$

472)  $\log_2 x \geq -1$

473)  $\log_{\sqrt{2}} x = 4$

Equazioni esponenziali più complesse:

474)  $2 \cdot 4^{x-2} = 8$

475)  $\frac{4^{2x-3}}{2} = 8$

476)  $5 \cdot 25^x = \frac{1}{5}$

477)  $1000 \cdot 0,1^{2x-1} = 0,1$

478)  $3 \cdot 9^{2x-1} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

479)  $3^{x+1} + 3^x = 36$

480)  $2^{x+2} + 2^{x+3} = 96$

481)  $2^{x+1} - 2^{x-1} = 96$

482)  $3^{x^2} = 81$

483)  $10 \cdot 1000^x = \frac{100^x}{\sqrt{10}}$

484)  $8^{x+1} - 4 \cdot 8^{x-1} = 15$

485)  $8^{x+1} - 15 = 4 \cdot 8^{x-1}$

486)  $9^{x+1} - 25 = 6 \cdot 9^{x-1}$

487)  $4^{x-1} + 8 = \frac{4^x}{2}$

488)  $8^x + 8^{x+1} = 36$

489)  $6^x = 5$

490)  $(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$

491)  $(6^x + 1)(6^x - 1) = 0$

492)  $(5^x - 5)(6^x - 6) = 0$

493)  $(10^x - 0,1)(10^x - 100) = 0$

494)  $36^x + 6^x = 30$

495)  $4^x = 6$

496)  $16^x - 4^x = 30$

497)  $3^{2x} + 3^x = 20$

498)  $2^{2x} + 2 = 3 \cdot 2^x$

499)  $4^x + 2 = 3 \cdot 2^x$

500)  $5 \cdot 2^{x-1} = 640$

501)  $2,3 \cdot 3^x = 20,7$

502)  $2,3 \cdot 2^x = 20,7$

503)  $27,5 \cdot 2^{\frac{x}{12}} = 1000$

504)  $3^{2x} = 3^x + 6$

505)  $3^{2x} = 3^x + 2$

506)  $16^x - 3 \cdot 4^x - 4 = 0$

507)  $25^x - 3 \cdot 5^x - 4 = 0$

508)  $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$

509)  $2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 5$

510)  $7^{x+1} + 7^{x-1} = 50$

511)  $3^{2x} + 3^x = 0$

512)  $15 \cdot 3^x = 30$

513)  $4^{x+1} + 4^x = 10$

514)  $2^x + 2^{-x} = \frac{65}{8}$

515)  $3^{x^2-x} = 9$

516)  $3^{4x} = 4^{3x}$

517)  $1^x = 2$

518)  $5^{2x} + 6 = 5 \cdot 5^x$

519)  $2^{x+1} = 5^{x-1}$

520)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \frac{1}{16}$

521)  $5^{x^2-3x} = 1$

522)  $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$

523)  $(4^x - 16) \cdot 4^x = 0$

524)  $(25^x - 5) \left(25^x - \frac{1}{5}\right) = 0$

525)  $(2^x - 64)(2^x + 64) = 0$

## ESPONENZIALI E LOGARITMI

526)  $(2^x - 4) \log x = 0$

**527)  $e^x = 2$**

528)  $e^x - 1 = 0$

529)  $e^x - 10 = 0$

530)  $e^x = e$

531)  $e^{2x} - 4e^x = 0$

532) Verifica le soluzioni degli esercizi 198, 199, 200, 202

533) Verifica le soluzioni degli esercizi 462, 463, 464, 465

534) Verifica le soluzioni degli esercizi 466, 472, 473, 476

535) Verifica le soluzioni degli esercizi 477, 479, 486, 487

536) In un allevamento i conigli crescono come  $y = 100 \cdot 2^{\frac{x}{100}}$ .

Quali numeri ci sono sotto le macchie? Dopo quanti giorni i conigli **decuplicano**?

giorno	0	100	158	200	232	258		300	
conigli	100	200	300	400	500	600	700		900

Trasforma in base dieci questi logaritmi:

537)  $\log_4 10$

540)  $\log_{\frac{1}{4}} 32$

543)  $\log_{25} \sqrt{5}$

546)  $\log_{23} 1$

538)  $\log_{\frac{1}{3}} 27$

541)  $\log_3 100$

544)  $\log_{25} 100$

547)  $\log_6 216$

539)  $\log_2 100$

542)  $\log_5 \sqrt{10}$

545)  $\log_{\frac{1}{3}} 1000$

548)  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

Trova l'intervallo di esistenza di questi logaritmi:

549)  $\log x$

553)  $\log x^2$

557)  $\log(-x)$

561)  $\log(x^2 + 4)$

550)  $\log(x + 2)$

554)  $\log(x^2 - 1)$

558)  $\log(-x + 2)$

562)  $\log(-x^2 - 4)$

551)  $\log(x - 3)$

555)  $\log(x^2 - 3x + 2)$

559)  $\log(-2x - 3)$

563)  $\log(x^2 - 4)$

552)  $\log 2x$

556)  $\log(2x - 3)$

560)  $\log(-x^2 + 4)$

564)  $\log(x^2 - 2x + 2)$

565) Dimostra che  $\log_2 3 = \log_4 9$

567) Dimostra che  $\log_2 3 = \log_8 27$

566) Dimostra che  $\log_2 3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

568) Dimostra che  $\log_2 3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$

Equazioni logaritmiche più complesse:

569)  $\log x + \log(x + 3) = 1$

583)  $\log_6(4 - x) + \log_6(5 - x) = 1$

570)  $\log_9 x^2 = 1$

584)  $2 \log(x - 1) = \log(x + 1)$

571)  $\log(-x) = 2$

**585)  $2 \log x - \log(2x - 10) = 1$**

572)  $\log_4(x(x + 3)) = 1$

586)  $\log_4 x + \log_4(2x - 4) = 2$

**573)  $\log 2x + \log(x - 4) = 1$**

**587)  $\log x + \log_x 10 = 2$**

574)  $\log_8(x + 1) - \log_8(x - 1) = 1$

588)  $\log^2 x = 1$

575)  $\log(x - 1) + \log(x + 2) = 1$

**589)  $\log^2 x + \log x - 2 = 0$**

**576)  $\log_6(2 - x) = 1 - \log_6(1 - x)$**

590)  $\log^2 x - \log x - 2 = 0$

577)  $\log_4(4 - x) = 2 - \log_4(10 - x)$

591)  $\log^2 x - 3 \log x = 0$

578)  $\log(2x + 3) - \log(x + 6) = 0$

592)  $\log^2 x - 3 \log x = 4$

579)  $\log(x^2 + 2x + 1) = 2$

593)  $\log(x^2 - 3x) = 1$

580)  $\log(4x - 2) - \log(x - 2) = 1$

594)  $\log_8(x^2 + 12x) = 2$

**581)  $2 \log_5 x - \log_5(3x + 4) = 0$**

**595)  $\log(3 - x) + \log(x + 4) = \log(2 - x)$**

**582)  $\log(-x) + \log(3 - x) = 1$**

**596)  $\log_2(x - 2) = \log_4(8 - x)$**

597) Scrivi un'equazione esponenziale che ha soluzione  $x = 9$ .

598) Scrivi un'equazione esponenziale che ha soluzione  $x = -3$ .

599) Scrivi un'equazione esponenziale che non ha soluzioni.

600) Scrivi un'equazione logaritmica che ha soluzione  $x = 3$ .

601) Scrivi un'equazione logaritmica che ha soluzione  $x = \frac{1}{2}$ .

602) Scrivi un'equazione logaritmica che ha soluzione  $x = 0$ .

**603) Trova il risultato:**  $2^{\log_2 5} = \dots$        $3^{\log_3 8} = \dots$        $2^{\log_4 9} = \dots$

604) Spiega perché  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ . ( $a > 0, m, n$  interi)

605) Dimostra che  $\log a + \log b = \log(ab)$ . ( $a > 0, b > 0$ )

**SOLUZIONI:**

- 14)  $\frac{1}{8}$     23)  $\frac{27}{8}$     28) 100000    34) 1    42) 12    51) 1    52)  $\frac{4}{9}$     63)  $a^8$   
 64)  $a$     72) 100    79) 1    80) 1    87)  $4^{n^2-n}$     91) 12    92) 4    99) 0,01    100) 16  
 145)  $x = 2$     147)  $x = 1$     158)  $x = -2$     159)  $\nexists$     167)  $x = -\frac{1}{2}$     169)  $x = \frac{2}{3}$     179)  $x = -\frac{1}{8}$   
 182)  $x = 1$  e  $x = -1$     185)  $x = \sqrt{2}$  e  $x = -\sqrt{2}$     187)  $x = -\frac{1}{2}$     188)  $x = -\frac{1}{4}$     197)  $x = 3$     199) 1  
 206)  $x = \frac{19}{25}$     208)  $x = \frac{1}{3}$     210)  $x = -2$     211)  $x = 3$     214) circa 3,322    221) circa 1 071,773€  
 226) Tra il 2033 e il 2034    233) circa 3162    236) Tra circa 18 minuti    239) 261,6 Hz    249)  $-1$   
 252)  $\nexists$     256)  $\frac{1}{3}$     258)  $\frac{4}{3}$     263)  $-\frac{1}{2}$     266)  $-2$     276)  $\frac{3}{2}$     279)  $\frac{3}{4}$     280)  $\frac{3}{2}$   
 285)  $-\frac{1}{2}$     286)  $\frac{1}{2}$     288)  $\frac{5}{12}$     336)  $-0,4$     337) 0,3    338) 0,7    340) 2  
 341) 1,  $-1$  e  $-1$     342) 4, 8 e 1    343)  $\frac{1}{2}, 0$  e  $-1$     358) La più bassa è  $MI_0$  e la più alta è  $RE\#_{10}$   
 369) 0,1    377)  $\frac{1}{3}$     382)  $-100$     385) 25    389)  $\frac{3}{2}$     390) 10 e  $-10$   
 396)  $x < \frac{1}{2}$     399) MAI    404)  $x < \frac{3}{2}$     414) 3,32    416)  $x \leq 2,32$   
 419)  $x < -2$     420)  $-2,32$     423)  $x \geq 0$     426) SEMPRE    428)  $x < 4$     430)  $x > 3$   
 447)  $x \in [-10; 0)$     450)  $x > 10$     456)  $x > 10$  e  $x < -10$     463)  $x > \frac{1}{16}$     473) 4  
 478)  $-\frac{1}{8}$     484)  $\frac{1}{3}$     494)  $\log_6 5$     498) 1 e 0    508) 1 e  $-1$     518)  $\log_5 2$  e  $\log_5 3$   
 527)  $\ln 2$     573) 5    576)  $-1$     581)  $4e - 1$     582)  $-2$     585) 10    587) 10  
 589) 10 e 0,01    595)  $-\sqrt{10}$     596) 4    603) 5, 8, 3

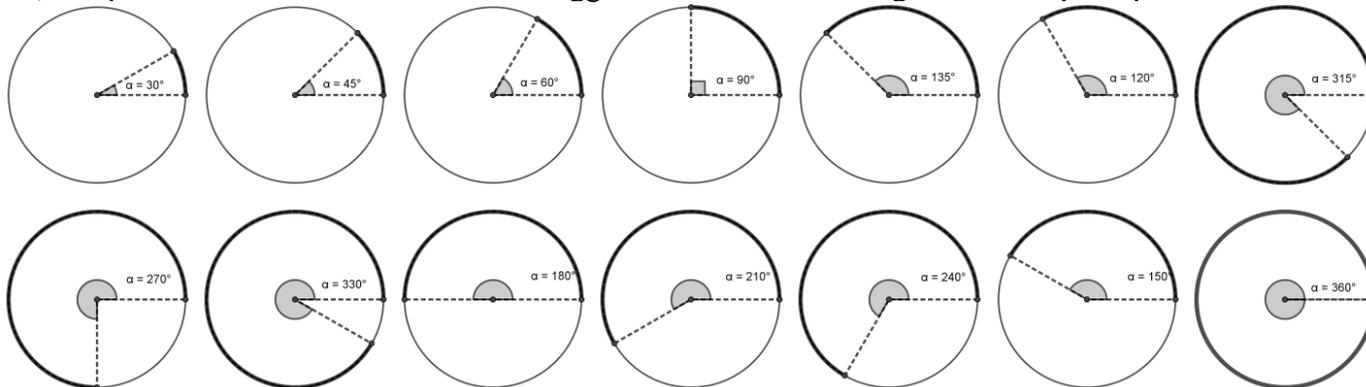
**ESPONENZIALI E LOGARITMI – MATURITÀ ITALIANA:**

- |  |   |
|--|---|
| 1) Risolvere l'equazione $\ln(2x - 9) + \ln(x - 5) = \ln(2x)$ nell'insieme dei numeri reali.                           | Soluzione $x = \frac{15}{2}$                  |
| 2) Risolvere l'equazione $\ln(4x - 5) - \ln(x - 2) = \ln(x)$ nell'insieme dei numeri reali.                            | Soluzione $x = 5$                             |
| 3) Risolvere l'equazione $\ln(x + 2) + \ln(x - 1) = \ln(2x)$ nell'insieme dei numeri reali.                            | Soluzione $x = 2$                             |
| 4) Risolvere l'equazione $\log(x - 2) + \log(x - 5) = 1$ nell'insieme dei numeri reali.                                | Soluzione $x = 7$                             |
| 5) Risolvere l'equazione $\ln(x + 3) + \ln(x - 3) = 0$ nell'insieme dei numeri reali.                                  | Soluzione $x = \sqrt{10}$                     |
| 6) Risolvere l'equazione $e^{2x} - 3e^x = 4$ nell'insieme dei numeri reali.  | Soluzione $x = \ln 4$                         |
| 7) Risolvere l'equazione $4^x - 2^{x+1} = 8$ nell'insieme dei numeri reali.  | Soluzione $x = 2$                             |
| 8) Risolvere l'equazione $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$ nell'insieme dei numeri reali.                                  | Soluzione $x = 2$ e $-2$                      |
| 9) Risolvere l'equazione $2^{\frac{\log_1 x}{2}} = \frac{1}{4}$ nell'insieme dei numeri reali.                         | Soluzione $x = 4$                             |
| 10) Risolvere l'equazione $e^x - 5 \cdot e^{-x} = -4$ nell'insieme dei numeri reali.                                   | Soluzione $x = 0$                             |
| 11) Risolvere la disequazione $2^{x+2} + 7 \cdot 2^{x-1} < 15$ nell'insieme dei numeri reali.                          | Soluzione $x \in (-\infty; 1)$                |
| 12) Risolvere l'equazione $\log(x + 13) - \log(x - 3) = \log(x + 4)$ .   | Soluzione $x = 5$                             |
| 13) Risolvere la disequazione $63 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2016$ nell'insieme dei numeri reali.              | Soluzione $x \in (-5; +\infty)$               |
| 14) Risolvere l'equazione $3 \log^2 x - 4 \log x + 1 = 0$ nell'insieme dei numeri reali.                               | Soluzione $x = 10$ e $\sqrt[3]{10}$           |
| 15) Risolvere la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 2$ nell'insieme dei numeri reali.                        | Soluzione $x \in \left(1; \frac{5}{4}\right]$ |
| 16) Risolvere la disequazione $\log_{0,5}(x - 2) \geq 0$ nell'insieme dei numeri reali.                                | Soluzione $x \in (2; 3]$                      |
| 17) Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \frac{1}{16}$ nell'insieme dei numeri reali.           | Soluzione $x \in (-2; 2)$                     |
| 18) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3e^{2x} = 13e^x + 10$ .                                       | Soluzione $x = \ln 5$                         |
| 19) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $2 \cdot 10^x + 7 \cdot 10^{-x} = 15$ .                        | Soluzione $x = \log 7$ e $\log \frac{1}{2}$   |
| 20) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 28 = 0$ .                 | Soluzione $x = \frac{\log 4}{\log 3}$         |
| 21) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log_3 x + \log_3 \frac{x}{3} = 1 - \log_{\sqrt{3}} 3$ .      | Soluzione $x = 1$                             |
| 22) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log^2 x = 4 \log x - 3$ .                                    | Soluzione $x = 10$ e $1000$                   |
| 23) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $2 \log_2 x - \log_2 \frac{x}{2} = 1 + \log_{\frac{1}{2}} 4$ . | Soluzione $x = \frac{1}{4}$                   |
| 24) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log_4 x + \log_4(x - 6) = \log_2 4$ .                        | Soluzione $x = 8$                             |
| 25) Nell'insieme dei numeri reali trovare l'intervallo di validità di $\ln^2 x - 4 \ln x \geq 0$ .                     | Soluzione $x \in (0; 1] \cup [e^4; \infty)$   |
| 26) Nell'insieme dei numeri reali trovare l'intervallo di validità di $(-x - 2)e^{-x} \leq 0$ .                        | Soluzione $x \in [-2; \infty)$                |
| 27) Risolvi l'equazione $\ln^2 x - 5 \ln x = 6$ .  | Soluzione $x = e^{-1}$ e $e^6$                |
| 28) Risolvi l'equazione $\log_4 x + \log_4 \frac{x}{4} = 1 + \log_2 4$ .   | Soluzione $x = 16$                            |
| 29) Risolvi l'equazione $100^x - 7 \cdot 10^x + 10 = 0$ .  | Soluzione $x = \log 5$ e $\log 2$             |
| 30) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3e^x - 4e^{-x} = 4$   | Soluzione $x = \ln 2$                         |
| 31) Nell'insieme dei numeri reali risolvere la disequazione $2^x + 2^{-x} > 2$   | Soluzione $x \neq 0$                          |
| 32) Nell'insieme dei numeri reali risolvere la disequazione $\log x + \log(x - 3) \geq 1$                              | Soluzione $x \in [5; +\infty)$                |
| 33) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3^{\frac{\log_1 x}{3}} = \frac{1}{9}$ .                       | Soluzione $x = 9$                             |
| 34) Risolvere l'equazione $\log(2x - 9) + \log(x - 5) = \log 2x$ .   | Soluzione $x = \frac{15}{2}$                  |

**ESERCIZI DI GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA:**

Gli esercizi in **neretto** sono un po' più difficili, le soluzioni sono a pagina 49.

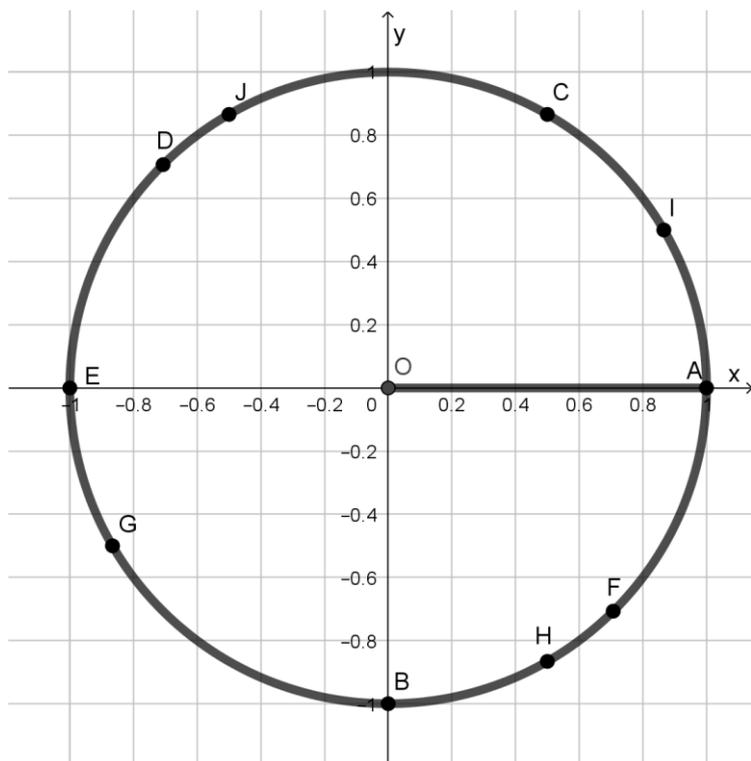
1) Il perimetro di una circonferenza di raggio 1 è  $2\pi$ . Trova la lunghezza della parte più nera:



2) Scrivi una regola per passare da gradi a radianti.

3) Scrivi una regola per passare da radianti a gradi.

4) Trova  $x$ ,  $y$  e angolo dei punti disegnati sulla circonferenza (usa righello e goniometro). L'angolo si misura sempre tra A, O e il punto (si misura l'angolo in O):



PUNTO	$x$	$y$	angolo
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
I			
J			

5) Nella circonferenza in alto, trova  $x$  e  $y$  usando i seguenti angoli:

angolo	$10^\circ$	$80^\circ$	$20^\circ$	$70^\circ$	$100^\circ$	$200^\circ$	$400^\circ$	$45^\circ$	$720^\circ$	$300^\circ$	$90^\circ$
$x$											
$y$											

## GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

Scrivi in radianti l'angolo che formano le lancette dell'orologio alle ore:

- |         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| 6) 6:00 | 10) 2:00  | 14) 8:00  | 18) 4:30  |
| 7) 9:00 | 11) 11:00 | 15) 7:00  | 19) 7:30  |
| 8) 3:00 | 12) 12:00 | 16) 5:00  | 20) 10:30 |
| 9) 1:00 | 13) 4:00  | 17) 10:00 | 21) 1:30  |

22) Di quanti gradi si sposta la lancetta delle ore dell'orologio dopo un'ora?

23) Di quanti gradi si sposta la lancetta delle ore dell'orologio dopo un minuto?

24) Di quanti gradi si sposta la lancetta dei minuti dell'orologio dopo un'ora?

25) Di quanti gradi si sposta la lancetta dei minuti dell'orologio dopo un minuto? E dopo 50 minuti?

Trasforma da gradi in radianti:

- |                 |                 |                 |                  |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 26) $30^\circ$  | 33) $270^\circ$ | 40) $360^\circ$ | 47) $-1^\circ$   |
| 27) $45^\circ$  | 34) $225^\circ$ | 41) $180^\circ$ | 48) $15^\circ$   |
| 28) $90^\circ$  | 35) $0^\circ$   | 42) $300^\circ$ | 49) $36^\circ$   |
| 29) $60^\circ$  | 36) $240^\circ$ | 43) $100^\circ$ | 50) $720^\circ$  |
| 30) $120^\circ$ | 37) $330^\circ$ | 44) $10^\circ$  | 51) $1080^\circ$ |
| 31) $150^\circ$ | 38) $-45^\circ$ | 45) $1^\circ$   | 52) $450^\circ$  |
| 32) $210^\circ$ | 39) $315^\circ$ | 46) $18^\circ$  | 53) $2^\circ$    |

Trasforma da radianti a gradi:

- |                      |                      |                       |                      |
|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| 54) $\frac{\pi}{4}$  | 59) $\frac{\pi}{3}$  | 64) $\frac{5}{6}\pi$  | 69) $\frac{5}{4}\pi$ |
| 55) $\frac{2}{3}\pi$ | 60) $\frac{7}{4}\pi$ | 65) $\frac{11}{6}\pi$ | 70) $\frac{2}{5}\pi$ |
| 56) $\pi$            | 61) $2\pi$           | 66) $3\pi$            | 71) $4\pi$           |
| 57) $\frac{3}{4}\pi$ | 62) $\frac{5}{3}\pi$ | 67) $\frac{7}{6}\pi$  | 72) $\frac{5}{3}\pi$ |
| 58) $\frac{3}{2}\pi$ | 63) $\frac{\pi}{6}$  | 68) $\frac{\pi}{2}$   | 73) $\frac{9}{4}\pi$ |

Trasforma questi angoli in angolo compresi tra  $[0; 360)$  oppure tra  $[0; 2\pi)$ :

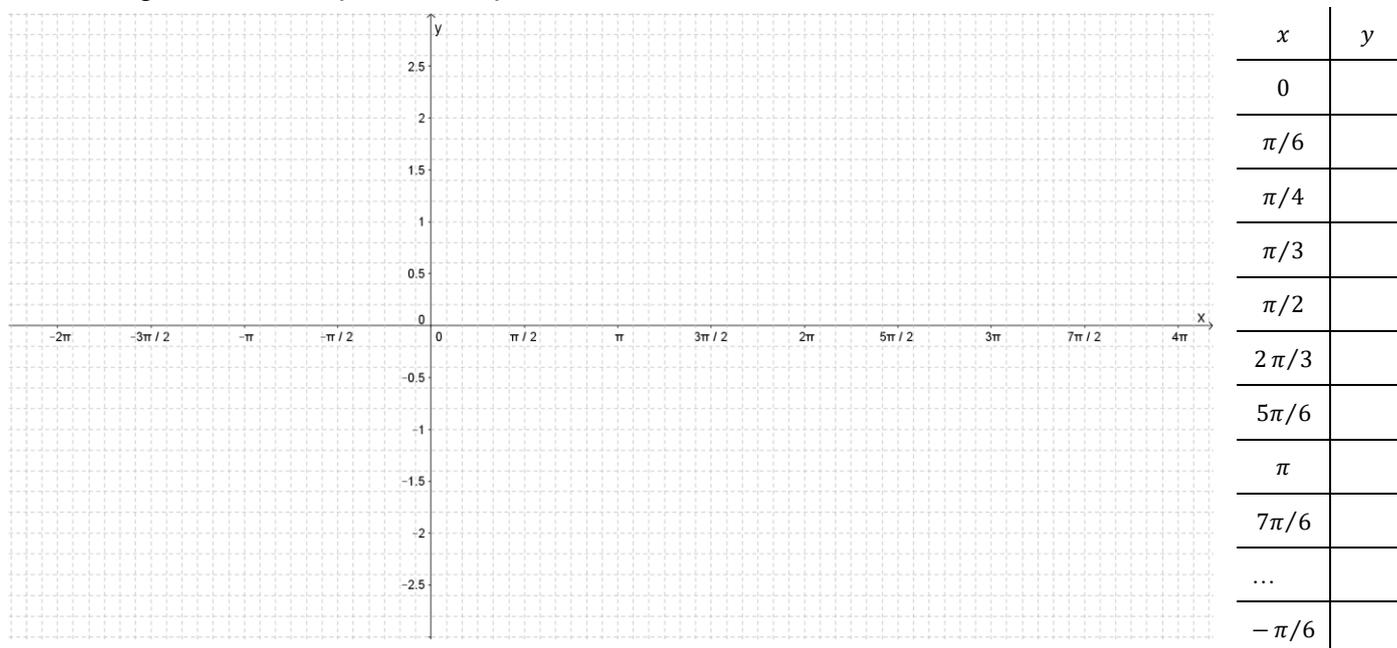
- |                         |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 74) $400^\circ =$       | 81) $450^\circ =$       | 88) $1200^\circ =$      | 95) $-45^\circ =$       |
| 75) $720^\circ =$       | 82) $-90^\circ =$       | 89) $1440^\circ =$      | 96) $-60^\circ =$       |
| 76) $1000^\circ =$      | 83) $-180^\circ =$      | 90) $700^\circ =$       | 97) $-30^\circ =$       |
| 77) $600^\circ =$       | 84) $500^\circ =$       | 91) $405^\circ =$       | 98) $-360^\circ =$      |
| 78) $\frac{5}{2}\pi =$  | 85) $\frac{7}{2}\pi =$  | 92) $-\frac{\pi}{4} =$  | 99) $-\pi =$            |
| 79) $7\pi =$            | 86) $25\pi =$           | 93) $-4\pi =$           | 100) $-\frac{\pi}{2} =$ |
| 80) $\frac{10}{3}\pi =$ | 87) $\frac{17}{6}\pi =$ | 94) $\frac{11}{2}\pi =$ | 101) $-\frac{\pi}{3} =$ |

Trova SENZA CALCOLATRICE il risultato:

- |                        |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 102) $\cos 30^\circ =$ | 104) $\tan 45^\circ =$ | 106) $\cos 45^\circ =$ | 108) $\sin 0^\circ =$  |
| 103) $\sin 60^\circ =$ | 105) $\sin 30^\circ =$ | 107) $\tan 90^\circ =$ | 109) $\cos 90^\circ =$ |

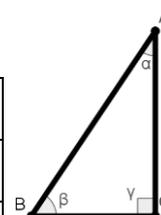
- |                         |                               |                              |                               |
|-------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 110) $\tan 0^\circ =$   | 120) $\sin 225^\circ =$       | 128) $\tan \frac{5}{4}\pi =$ | 136) $\sin \frac{7}{4}\pi =$  |
| 111) $\tan 60^\circ =$  | 121) $\tan 315^\circ =$       | 129) $\cos \frac{3}{2}\pi =$ | 137) $\tan \frac{\pi}{4} =$   |
| 112) $\cos 135^\circ =$ | 122) $\cos \pi =$             | 130) $\sin 2\pi =$           | 138) $\cos \frac{9}{2}\pi =$  |
| 113) $\sin 270^\circ =$ | 123) $\tan \frac{\pi}{3} =$   | 131) $\tan \frac{7}{4}\pi =$ | 139) $\cos \frac{\pi}{2} =$   |
| 114) $\cos 300^\circ =$ | 124) $\sin \frac{3}{4}\pi =$  | 132) $\cos \frac{7}{4}\pi =$ | 140) $\sin \frac{7}{3}\pi =$  |
| 115) $\tan 270^\circ =$ | 125) $\tan \frac{7}{6}\pi =$  | 133) $\sin \frac{5}{6}\pi =$ | 141) $\tan \frac{25}{4}\pi =$ |
| 116) $\cos 315^\circ =$ | 126) $\cos \frac{11}{6}\pi =$ | 134) $\cos \frac{5}{3}\pi =$ | 142) $\sin 600^\circ =$       |
| 117) $\sin 330^\circ =$ | 127) $\sin \frac{5}{3}\pi =$  | 135) $\tan \frac{5}{3}\pi =$ |                               |
| 118) $\tan 180^\circ =$ |                               |                              |                               |
| 119) $\cos 360^\circ =$ |                               |                              |                               |

143) Disegna le funzioni  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$ .



144) Nei seguenti triangoli usiamo le lettere come nel triangolo a destra. Completa CON LA CALCOLATRICE la tabella (le misure sono in centimetri):

Triangolo	$ AC $	$ BC $	$ AB $	$\beta$	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$\tan \beta$	$\frac{ AC }{ BC }$	$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta$
1°			1	10°					
2°			1	20°					
3°			1	30°					
4°			1	40°					
5°			1	50°					
6°			1	60°					
7°			1	70°					
8°			1	80°					



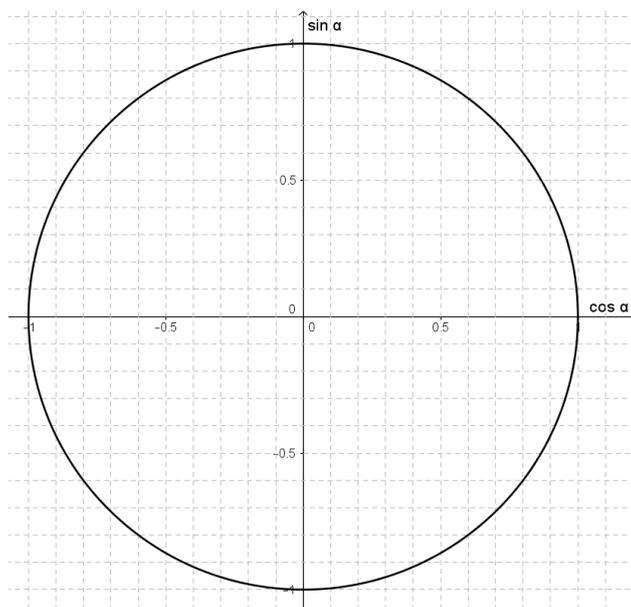
## GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

145) Usa goniometro e righello. In tutti questi triangoli usiamo le lettere come nell'esercizio precedente. Tutte le misure sono in centimetri. Completa la tabella e disegna i triangoli **SENZA CALCOLATRICE**:

	$ BC $	$ AC $	$ AB $	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\frac{ AC }{ AB }$	$\frac{ BC }{ AB }$
1°	3			70°		90°						
2°	5			50°		90°						
3°	4				50°	90°						
4°		6		45°		90°						
5°		5			30°	90°						
6°		8		70°		90°						
7°	4	4				90°						
8°	3	6				90°						
9°	4	2				90°						
10°			8	45°		90°						
11°			7		20°	90°						
12°			7	70°		90°						
13°	3		5			90°						

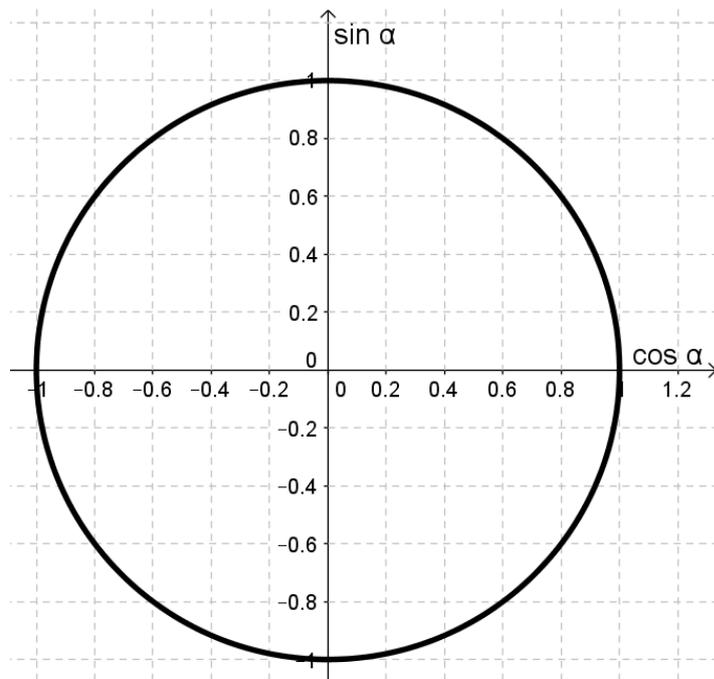
146) Completa la tabella senza calcolatrice, ma con l'aiuto del disegno:

$\alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$
	0,6		
		0,6	
	-0,4		
		-0,4	
			-1



147) Completa la tabella SENZA calcolatrice:

angolo	gradi	tangente	coseno	seno
0	0°		1	0
$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\pi}{3}$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$			0	
$\frac{2}{3}\pi$			$-\frac{1}{2}$	
$\frac{3}{4}\pi$				$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$				
$\pi$			-1	
$\frac{7}{6}\pi$				$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{4}{3}\pi$				
$\frac{3}{2}\pi$				
$\frac{5}{3}\pi$				
$\frac{7}{4}\pi$				
$\frac{11}{6}\pi$				
$2\pi$				
$\frac{9}{4}\pi$	405°		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{7}{3}\pi$				
$\frac{5}{2}\pi$				
$3\pi$				
$\frac{9}{2}\pi$				
$-\frac{\pi}{4}$				



148) Per quali angoli il coseno è positivo?

149) Per quali angoli il coseno è negativo?

150) Per quali angoli il seno è positivo?

151) Per quali angoli il seno è negativo?

152) Per quali angoli la tangente è positiva?

153) Per quali angoli la tangente è negativa?

154) Disegna 30° e 135° in alto. Trova seno e coseno.

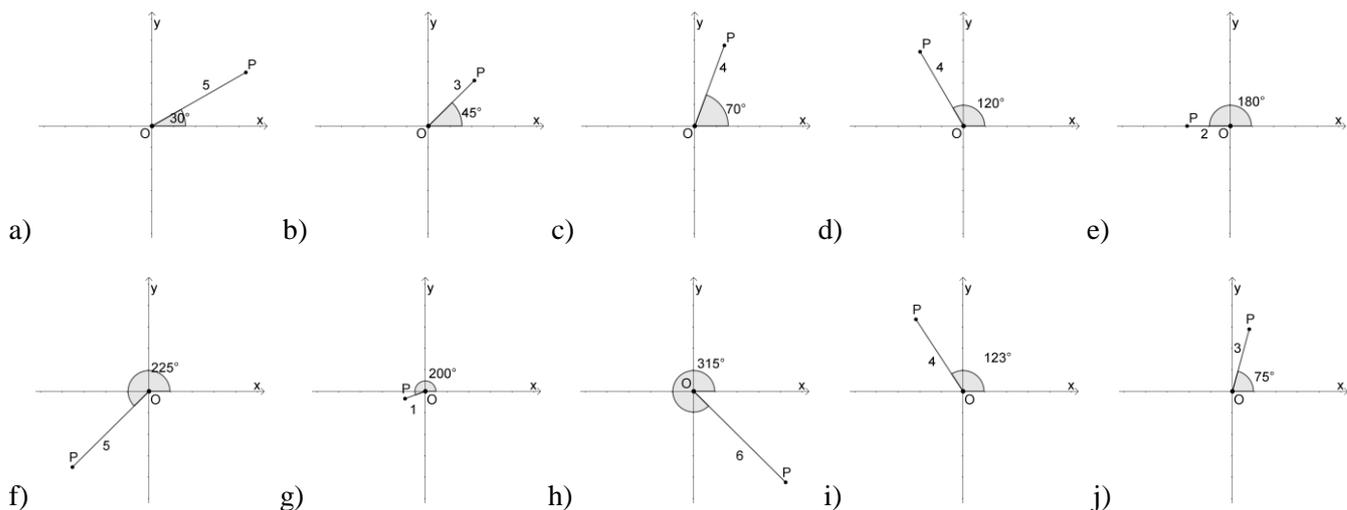
155) Quali angoli hanno seno e coseno uguali?

156) Trova **tutte** le soluzioni di  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

157) Trova **tutte** le soluzioni di  $\cos \alpha = 0,5$

# GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

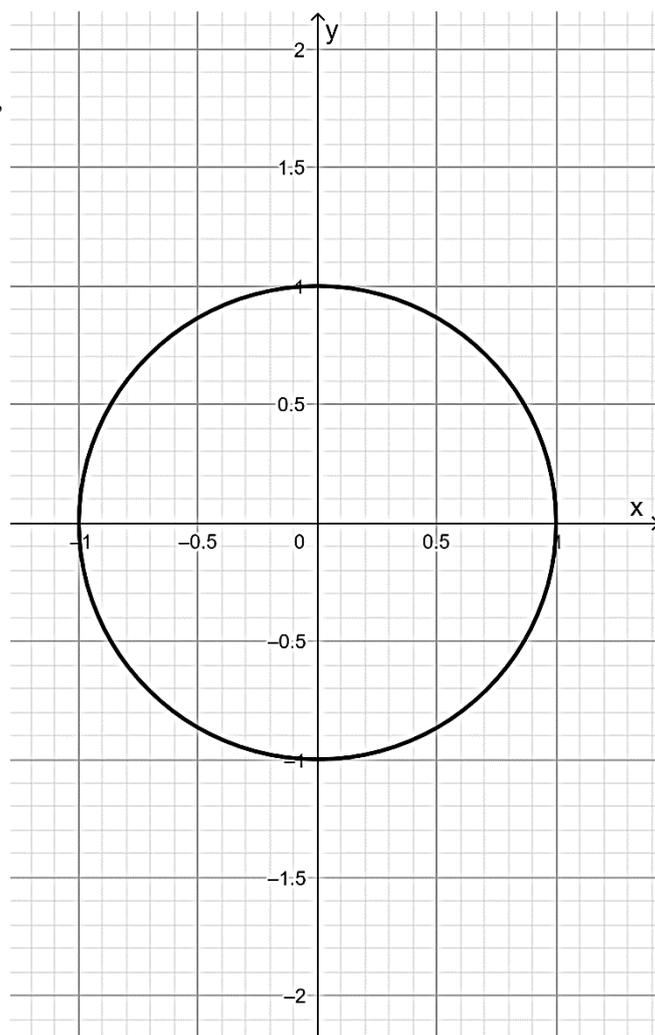
158) Trova con precisione  $x, y$  dei punti P disegnati sul piano cartesiano, conoscendo lunghezza e angolo:



159) Risolvi le equazioni e disequazioni senza calcolatrice, con il goniometro e il disegno a destra (a matita!)

$(\sqrt{2} \cong 1,41 \quad \sqrt{3} \cong 1,73)$

- a)  $2 \sin x = -\sqrt{3}$
- b)  $\cos x = 0$
- c)  $\tan x = -\sqrt{3}$
- d)  $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- e)  $2 \cos x - 1 < 0$
- f)  $\tan x - 1 \leq 0$
- g)  $\sin x = 0,2$
- h)  $\cos x = -0,8$
- i)  $2 \tan x - 3 = 0$
- j)  $\sin x \leq 0,9$
- k)  $\cos x \geq -0,3$
- l)  $\tan x > -1,7$



Risolvi queste equazioni e disequazioni SENZA CALCOLATRICE nell'intervallo  $[0; 2\pi)$ :

- |                                    |                                     |                                 |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| 160) $\sin x = 1$                  | 166) $\tan x = \sqrt{3}$            | 172) $\cos x = 2$               |
| 161) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 167) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 173) $\sin x = -\frac{1}{2}$    |
| 162) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 168) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 174) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ |
| 163) $\cos x = 0$                  | 169) $\tan x = -1$                  | 175) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ |
| 164) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 170) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 176) $\tan x > 1$               |
| 165) $\cos x = -\frac{1}{2}$       | 171) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  | 177) $\cos x < 1$               |
|                                    |                                     | 178) $\sin x \leq 1$            |

- 179)  $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$       188)  $2 \sin x - \sqrt{3} \leq 0$       196)  $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 180)  $\sin x = 0$       189)  $\cos x > \sqrt{3}$       197)  $\sin x > -2$   
 181)  $\sqrt{2} \cos x = 2$       190)  $\frac{\sin x}{\cos x} = 1$       198)  **$\cos x \leq -1$**   
 182)  $2 \sin x - 1 = 0$       191)  **$\sin x = \sin \frac{7}{4} \pi$**       199)  $\sin x = \sin \frac{5\pi}{4}$   
 183)  $\cos x - \sqrt{2} = 0$       192)  $\frac{\sin x}{\cos x} \leq 0$       200)  $\sin x + 2 \leq 0$   
 184)  $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$       193)  $\sqrt{3} \cos x = \sin x$       201)  $\sin(\pi + x) = \frac{1}{2}$   
 185)  $\tan x - \sqrt{3} \leq 0$       194)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$       202)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 186)  $\tan x + \sqrt{3} \geq 0$       195)  $\sin x + \cos x = 0$       203)  $\tan(\pi + x) = -1$   
 187)  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$   
 204) Risolvi gli esercizi 167-176 nell'intervallo  $(-\infty; +\infty)$ .

Esercizi vari:

- 205)  $\cos x \sin x = 0$       210)  $(\tan x - \sqrt{3})\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$   
 206)  $\sin^2 x = 0$       211)  $(\tan x + \log 10)(\cos x - 2) = 0$   
 207)  $(\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$       212)  $(\sin x - \log_4 2)(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$   
 208)  $\left(\cos x + \tan \frac{\pi}{4}\right)(\cos x - 1) = 0$   
 209)  $(\tan x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$

Trova TUTTE le soluzioni di queste equazioni nell'intervallo  $[0; 2\pi)$ :

- 213)  $\sin 2x = 1$       219)  $\tan 4x = 1$       225)  $\cos 4x = -1$   
 214)  $\sin 3x = \frac{1}{2}$       220)  $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$       226)  $\cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 215)  $\sin 4x = -1$       221)  $\tan 3x = -1$       227)  $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 216)  $\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$       222)  $\cos 4x = -\frac{1}{2}$       228)  $\cos(-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 217)  $\cos 3x = \frac{1}{2}$       223)  $\tan 4x = -\sqrt{3}$       229)  $\sin(-x) = 0$   
 218)  $\cos 5x = -\frac{1}{2}$       224)  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$       230)  $\tan(-x) = 1$

Risolvi queste equazioni nell'intervallo  $(-\infty; +\infty)$  con la sostituzione  $a = \cos x$ :

- 231)  $\cos^2 x - 1 = 0$       236)  $4 \cos^2 x = 1$   
 232)  $\cos^2 x + 1 = 0$       237)  $4 \cos^2 x = 3$   
 233)  $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$       238)  $(\cos x - 1)(2 \cos x - 1) = 0$   
 234)  $2 \cos^2 x + 1 = 3 \cos x$       239)  $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$   
 235)  $2 \cos^2 x = 1$       240)  $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$

Risolvi queste equazioni nell'intervallo  $[0; 2\pi)$  con la sostituzione  $a = \sin x$ :

- 241)  $\sin^2 x - 1 = 0$       246)  $4 \sin^2 x = 1$   
 242)  $\sin^2 x + 1 = 0$       247)  $4 \sin^2 x = 3$   
 243)  $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$       248)  $(\sin x - 1)(2 \sin x - 1) = 0$   
 244)  $2 \sin^2 x + 1 = 3 \sin x$       249)  $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$   
 245)  $2 \sin^2 x = 1$       250)  $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$

## GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

Risolvi queste equazioni nell'intervallo  $(-\infty; +\infty)$  con la sostituzione  $a = \tan x$ :

$$251) \quad \tan^2 x - 1 = 0$$

$$252) \quad \tan^2 x = 3$$

$$253) \quad \tan^2 x + 3 = 0$$

$$254) \quad \tan^2 x + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan x = 0$$

$$255) \quad \tan^2 x + \tan x = 0$$

$$256) \quad \tan^2 x = \tan x$$

$$257) \quad 3 \tan^2 x = 1$$

$$258) \quad \tan x = \frac{1}{\tan x}$$

Risolvi questi esercizi usando le formule della teoria:

$$259) \quad \sin x + \cos x = 0$$

$$260) \quad \sin x - \cos x = 0$$

$$261) \quad \sqrt{3} \sin x = \cos x$$

$$262) \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$263) \quad \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$264) \quad \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$265) \quad \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$$

$$266) \quad \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$$

$$267) \quad \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 0$$

$$268) \quad \sin^2 x + 5 \cos^2 x = 4$$

$$269) \quad \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$270) \quad \cos 2x = \cos x$$

$$271) \quad \cos 2x = \sin x$$

$$272) \quad 2 \cos^2 x + \sin x = 2$$

$$273) \quad 3 + 3 \sin x = 2 \cos^2 x$$

$$274) \quad 2 \cos^2 x = 3 \sin x$$

$$275) \quad 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$276) \quad \sin 2x - \cos x = 0$$

$$277) \quad \sin 2x + \sin x = 0$$

$$278) \quad 2 \sin x = \sqrt{3} \tan x$$

$$279) \quad 2 \sin x \cos x = 1$$

$$280) \quad \sin 2x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$281) \quad \sin^4 x - \cos^4 x = 0$$

$$282) \quad \sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$283) \quad \sin x + \sin(-x) = 1$$

$$284) \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$$

$$285) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$286) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$287) \quad \sin^2 2x = 2 - \cos^2 2x$$

$$288) \quad \cos^2 x - \sin 2x = \sin^2 x$$

$$289) \quad \cos(x + 2\pi) + \cos x = 1$$

$$290) \quad \sin(x + 2\pi) + \sin x = \sqrt{3}$$

$$291) \quad \cos x + \cos(-x) = 1$$

$$292) \quad \sin x + \sin(x - \pi) = 1$$

$$293) \quad \cos x + \cos(x - \pi) = 1$$

$$294) \quad \cos 2x + \sin 2x = 1$$

$$295) \quad \cos x + \sin x = 1$$

$$296) \quad \tan x + \frac{1}{\tan x} - 2 = 0$$

$$297) \quad \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$$

$$298) \quad \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$299) \quad (2 \cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$300) \quad (2 \cos x - \sqrt{2})(\sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$301) \quad (\tan x - 1)(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$302) \quad 4 \sin^2 x - \sqrt{24} \sin x + 1 = 0$$

$$303) \quad 12 \cos^2 x - 7 \cos x + 1 = 0$$

$$304) \quad \tan^2 x - 5 \tan x + 6 = 0$$

Calcola questi valori senza calcolatrice usando le formule di somma e differenza di angoli:

$$305) \quad \cos 15^\circ =$$

$$307) \quad \sin \frac{5}{12} \pi =$$

$$309) \quad \cos 75^\circ =$$

$$306) \quad \sin \frac{7}{12} \pi =$$

$$308) \quad \cos 165^\circ =$$

$$310) \quad \sin \frac{13}{12} \pi =$$

- 311) Se  $\cos x = 0,28$ , quanto vale  $\sin x$  ?  
 312) Se  $\sin x = \frac{8}{17}$ , quanto vale  $\cos x$  ?  
 313) Se  $\tan x = \frac{3}{4}$ , quanto valgono  $\sin x$  e  $\cos x$ ?  
 314) Se  $\tan x = \frac{12}{5}$ , quanto valgono  $\sin x$  e  $\cos x$ ?  
 315) Trova con la calcolatrice questi risultati:  
 $\arctan 5 =$                        $\arcsin 0,4 =$                        $\arccos(-0,9) =$                        $\arcsin(-1,1) =$

Risolvi i seguenti triangoli rettangoli (le misure sono in centimetri e in gradi,  $\gamma = 90^\circ$ ):

- 316) Ipotenusa 10     $\alpha = 40^\circ$   
 317) Ipotenusa 15     $\beta = 60^\circ$   
 318) Cateti di lunghezza 8 e 6  
 319) Cateti di lunghezza 12 e 5  
 320) Ipotenusa 8 cateto 4  
 321) Ipotenusa 12 cateto 10  
 322) Cateto minore 4             $\alpha = 30^\circ$   
 323) Cateto maggiore 6         $\alpha = 50^\circ$

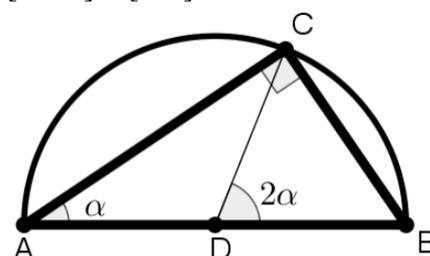
Risolvi matematicamente i seguenti triangoli e **disegnali** (le misure sono in centimetri e in gradi, risultati pag. 49):

- 324)  $a = 5$              $b = 6$              $c = 7$   
 325)  $a = 5$              $b = 3$              $c = 4$   
 326)  $a = 6$              $\beta = 45^\circ$          $\gamma = 60^\circ$   
 327)  $b = 7$              $\alpha = 35^\circ$          $\beta = 70^\circ$   
 328)  $b = 5$              $c = 5$              $\alpha = 50^\circ$   
 329)  $a = 4$              $c = 6$              $\beta = 60^\circ$   
 330)  $a = 5$              $b = 2$              $\gamma = 45^\circ$   
 331)  $c = 8$              $\alpha = 20^\circ$          $\gamma = 100^\circ$   
 332)  $a = 7$              $b = 5$              $c = 6$   
 333)  $a = 5$              $b = 13$              $\gamma = 67,38^\circ$   
 334)  $b = 7,5$          $c = 8,5$              $\alpha = 28,07^\circ$   
 335)  $a = 6$              $b = 5$              $c = 12$   
 336)  $a = 4$              $b = 7$              $\alpha = 30^\circ$   
 337)  $a = 7$              $c = 4$              $\alpha = 80^\circ$   
 338)  $a = 5$              $b = 6$              $\beta = 40^\circ$   
 339)  $b = 6$              $c = 8$              $\beta = 36,87^\circ$   
 340)  $a = 8$              $c = 4$              $\gamma = 30^\circ$   
 341)  $b = 11$              $c = 11$              $\gamma = 60^\circ$   
 342)  $b = 24$              $c = 21$              $\gamma = 60^\circ$   
 343)  $a = 4$              $c = 2$              $\gamma = 30^\circ$   
 344)  $b = \sqrt{a}$              $c = \sqrt{2a}$              $\alpha = 135^\circ$   
 345)  $b = 3$              $c = 5$              $\beta = 70^\circ$   
 346) Due lati di misura 5 e 6 e l'angolo opposto al lato maggiore  $50^\circ$   
 347) Due lati di misura  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{12}$  e l'angolo opposto al lato minore  $30^\circ$   
 348) Un lato di misura 10, gli angoli sul lato di misura  $23^\circ$  e  $34^\circ$   
 349) Trova angoli e area di un poligono regolare di 5 lati di lunghezza 1 cm.  
 350) Trova angoli e area di un poligono regolare di 10 lati di lunghezza 1 cm.  
 351) Trova angoli e area di un poligono regolare di 20 lati di lunghezza 1 cm.

Sul piano cartesiano calcola angoli, area e perimetro dei triangoli ABC:

- 352)  $A[0; 0]$   $B[2; 0]$   $C[0; 4]$   
 353)  $A[0; 0]$   $B[-3; 0]$   $C[0; -4]$   
 354)  $A[1; 2]$   $B[2; 0]$   $C[-3; -4]$   
 355)  $A[2; 2]$   $B[-2; 0]$   $C[0; -4]$   
 356)  $A[-2; 2]$   $B[1; -1]$   $C[-3; -3]$   
 357)  $A[1; 4]$   $B[1; -4]$   $C[5; 3]$

- 358) Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è sempre rettangolo.  
 In una circonferenza l'angolo al centro è sempre il doppio dell'angolo sulla circonferenza. Il punto D è il centro della semicirconferenza.  
 $|AD| = |DC| = |DB| = 1$   
 Dimostra che  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ .



## GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

359) Nel lancio del disco uno strumento nel punto A misura distanze e angoli.

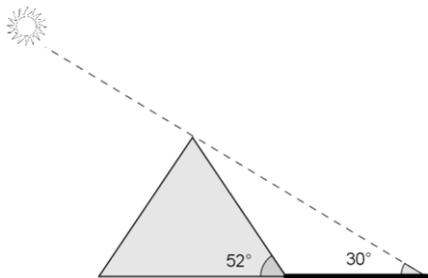
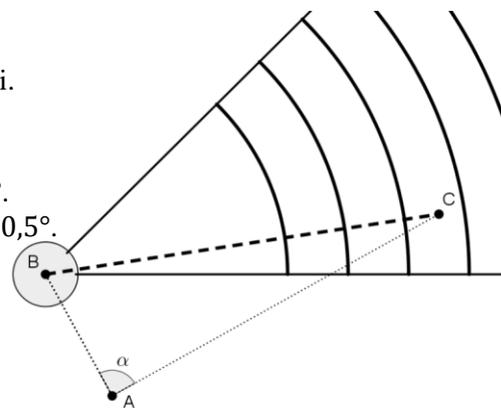
La distanza AB è 10 metri.

Il raggio della pedana è 2 metri.

Il primo atleta lancia il disco, lo strumento misura  $AC = 75m$ ,  $\alpha = 77^\circ$ .

Il secondo atleta lancia il disco, lo strumento misura  $AC = 77m$ ,  $\alpha = 60,5^\circ$ .

Chi ha vinto? Con quale misura?



360) L'ombra è lunga 139,7 m. Calcola l'altezza della piramide.

### SOLUZIONI:

174)  $x \in \left[0; \frac{7}{6}\pi\right] \cup \left[\frac{11}{6}\pi; 2\pi\right)$     176)  $x \neq 0$     177)  $x \in [0; 2\pi)$     189)  $x = \frac{\pi}{4} e \frac{5}{4}\pi$

190)  $x = \frac{7}{4}\pi e \frac{5}{4}\pi$     191)  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$     192)  $x = \frac{\pi}{3} e \frac{4}{3}\pi$     197)  $x = \pi$

269) SEMPRE    281) Diventa  $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$  cioè  $(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$

283)  $\nexists$     284) Diventa  $\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} + 1 = 0$  e quindi  $\cos x + 1 = 0 \dots$

288)  $\cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x$  e si divide tutto per  $\cos^2 x \dots$     295) Si fa come l'esercizio 294

315)  $78,69^\circ$      $23,58^\circ$      $154,16^\circ$      $\nexists$     324)  $\alpha = 44,42^\circ$ ;  $\beta = 57,12^\circ$ ;  $\gamma = 78,46^\circ$ ;  $A = 14,7$

325)  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 36,87$ ;  $\gamma = 53,13^\circ$ ;  $A = 6$     326)  $b = 4,39$ ;  $c = 5,38$ ;  $A = 11,41$

327)  $a = 4,27$ ;  $c = 7,2$ ;  $A = 14,44$     328)  $a = 4,23$ ;  $\beta = 65^\circ$ ;  $\gamma = 65^\circ$ ;  $A = 9,58$

329)  $b = 5,29$ ;  $\alpha = 40,9^\circ$ ;  $\gamma = 79,1^\circ$ ;  $A = 10,39$     330)  $c = 3,85$ ;  $\alpha = 113,48^\circ$ ;  $\beta = 21,52^\circ$ ;  $A = 3,54$

331)  $a = 2,78$ ;  $b = 7,04$ ;  $A = 9,62$     332)  $\alpha = 78,46^\circ$ ;  $\beta = 44,42^\circ$ ;  $\gamma = 57,12^\circ$ ;  $A = 14,7$

333)  $c = 12$ ;  $\alpha = 22,62^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$ ;  $A = 30$     334)  $a = 4$ ;  $\beta = 61,93^\circ$ ;  $\gamma = 90^\circ$ ;  $A = 15$     335)  $\nexists$

336)  $c = 8$ ;  $\beta = 61,04^\circ$ ;  $\gamma = 88,96^\circ$ ;  $A = 14$      $c = 4,13$ ;  $\beta = 118,96^\circ$ ;  $\gamma = 31,04^\circ$ ;  $A = 7,22$

337)  $b = 6,48$ ;  $\beta = 65,76^\circ$ ;  $\gamma = 34,25^\circ$ ;  $A = 12,77$     338)  $c = 8,9$ ;  $\alpha = 32,39^\circ$ ;  $\gamma = 107,61^\circ$ ;  $A = 14,3$

339)  $a = 10$ ;  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\gamma = 53,13^\circ$ ;  $A = 24$      $a = 2,8$ ;  $\alpha = 16,26^\circ$ ;  $\gamma = 126,87^\circ$ ;  $A = 6,72$

340)  $b = 6,93$ ;  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $A = 13,86$     341)  $a = 11$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $A = 52,39$

342)  $a = 15$ ;  $\alpha = 38,21^\circ$ ;  $\beta = 81,79^\circ$ ;  $A = 155,88$      $a = 9$ ;  $\alpha = 21,79^\circ$ ;  $\beta = 98,21^\circ$ ;  $A = 93,53$

343)  $b = 3,46$ ;  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $A = 3,46$     344)  $a = 5$ ;  $b = 2,24$ ;  $c = 3,16$ ;  $\beta = 26,57^\circ$ ;  $\gamma = 18,43^\circ$

345)  $\nexists$     346) terzo lato 7,83, Area 15    347) terzo lato 3, Area 2,6

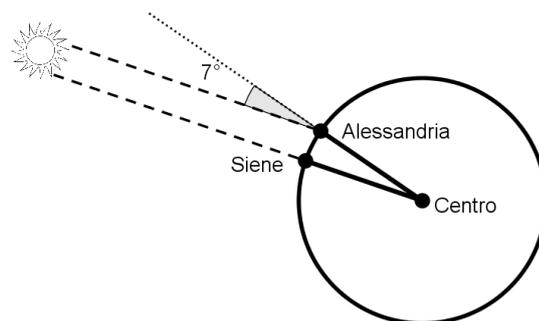
348) lati 5,1 e 7,3, Area 14,26    349) angoli  $108^\circ$  Area  $1,72 \text{ cm}^2$

350) angoli  $144^\circ$  Area  $7,69 \text{ cm}^2$     351) angoli  $162^\circ$  Area  $31,57 \text{ cm}^2$

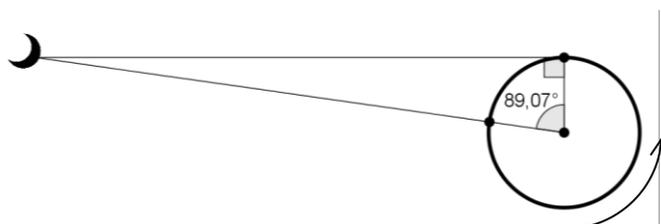
## TRIGONOMETRIA E ASTRONOMIA

(le prime misure degli astri)

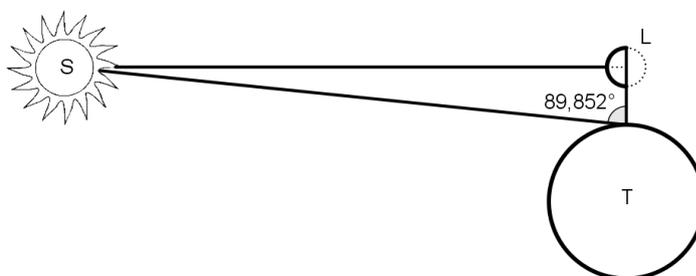
- 361) Eratostene nel 200 a.C. misurò il raggio della Terra conoscendo la distanza Siene – Alessandria di 787 Km. A mezzogiorno il sole è verticale a Siene e forma un angolo di  $7^\circ$  ad Alessandria. Trova il raggio della Terra.



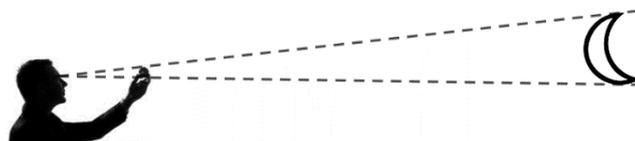
- 362) Il tempo tra il sorgere della luna e il suo essere verticale alla terra è 5h56m17s, cioè  $89,07^\circ$ . Se il raggio della Terra è 6350 Km, quanto è la distanza Terra – Luna?



- 363) La distanza Terra – Luna è circa 385.000 Km. Quando c'è mezzaluna, forma un angolo di  $90^\circ$  con il sole. Se l'angolo S–T–L è  $89,852^\circ$ , quanto è la distanza Terra – Sole?



- 364) Se si tiene una moneta da 1 centesimo (diametro 16,25 mm) a 1,8 m di distanza, la moneta copre perfettamente la luna piena. Se la distanza Terra – Luna è 385.000 Km, quanto è il diametro della luna?



- 365) La luna appare grande esattamente quanto il sole. Se la luna ha diametro 3500 Km, e sappiamo che la distanza Terra – Luna è 385.000 Km e la distanza Terra – Sole 150.000.000 Km, quanto è il diametro del sole?

## GONIOMETRIA – MATURITÀ ITALIANA

Trova i risultati tra tutti i numeri reali:

- |  |  |
|--|--|
| 1) Risolvere l'equazione $\sin^2 x - \cos x = 1$ .                     | Soluzioni $x = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\} + 2k\pi$                            |
| 2) Risolvere l'equazione $2 \sin x + \sqrt{2} \sin 2x = 0$ .           | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi \right\} + 2k\pi$                        |
| 3) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin x = 1$ .                      | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi \right\} + 2k\pi$                         |
| 4) Risolvere l'equazione $\cos 4x + \sin 2x = 1$ .                     | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2} \right\} + k\pi$              |
| 5) Risolvere l'equazione $\cos x - \cos 2x = 0$ .                      | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right\} + 2k\pi$                             |
| 6) Risolvere l'equazione $\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$ . | Soluzioni $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$   |
| 7) Risolvere l'equazione $\cos^2 x - \sin x = 1$ .                     | Soluzioni $x = \left\{ 0, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\} + 2k\pi$  |
| 8) Risolvere l'equazione $2 \cos^2 x + \cos 2x = 0$ .                  | Soluzioni $x = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \right\} + 2k\pi$ |
| 9) Risolvere la disequazione $1 > \sqrt{2} \sin x$ .                   | Soluzioni $x \in \left( \frac{3}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi \right) + 2k\pi$                                |
| 10) Risolvere la disequazione $2 \cos^2 x \leq 1$ .                    | Soluzioni $x \in \left[ \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right] + k\pi$                                  |
| 11) Risolvere l'equazione $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x = 2$ .         | Soluzioni $x = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} + 2k\pi$  |

Trova i risultati nell'intervallo  $[0; 2\pi)$ :

- |   |  |
|---|--|
| 12) Risolvere l'equazione $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ . | Soluzioni $x = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$   |
| 13) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin 2x = 1$ .   | Soluzioni $x = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5}{4}\pi$  |
| 14) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin 2x = 1$ .   | Soluzioni $x = 0, \pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$   |
| 15) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin x = 1$ .  | Soluzioni $x = 0, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$  |
| 16) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin x = 1$ .  | Soluzioni $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$  |
| 17) Risolvere l'equazione $3 \sin x + \cos 2x = -1$ .   | Soluzioni $x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$  |
| 18) Risolvere l'equazione $\sin^2 x + \cos x = 1 + \cos x (\cos x + 1)$ .   | Soluzioni $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$  |
| 19) Risolvere l'equazione $\sin 2x + 1 = 0$ .   | Soluzioni $x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$   |
| 20) Risolvere la disequazione $\sin^2 x \geq \frac{3}{4}$ .   | Soluzioni $x \in \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \right] \cup \left[ \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right]$                            |
| 21) Risolvere la disequazione $\cos^2 x > \frac{3}{4}$ .  | Soluzioni $x = \left[ 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left( \frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi \right) \cup \left( \frac{11}{6}\pi; 2\pi \right)$ |
| 22) Risolvere l'equazione $2 \cos x \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$ .   | Soluzioni $x = \frac{\pi}{8}; \frac{5}{8}\pi; \frac{9}{8}\pi; \frac{13}{8}\pi$   |
| 23) Risolvere l'equazione $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ .   | Soluzioni $x = \frac{3}{8}\pi; \frac{7}{8}\pi; \frac{11}{8}\pi; \frac{15}{8}\pi$   |

**TRIGONOMETRIA – MATURITÀ ITALIANA**

Trovare tutte le possibili soluzioni:

24) Risolvere il triangolo in cui  $\alpha = \beta = 4\gamma$  e  $c = 8$  cm. Soluzioni  $\alpha = \beta = 80^\circ, \gamma = 20^\circ$   $a = b = 23,035$  cm  $A = 90,74$  cm<sup>2</sup>

25) Risolvere il triangolo in cui  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 4$ ,  $c = 4\sqrt{2}$  cm.

Soluzione 1:  $\beta = 105^\circ, \gamma = 45^\circ, b = 7,73$  cm,  $A = 10,93$  cm<sup>2</sup>

Soluzione 2:  $\beta = 15^\circ, \gamma = 135^\circ, b = 2,07$  cm,  $A = 2,93$  cm<sup>2</sup>

26) Risolvere il triangolo in cui  $a = 2b = 2c = 10$  cm.

Soluzione: Non ha soluzioni, non è un triangolo

27) \* La circonferenza a destra ha raggio 10 cm e  $\cos \alpha = 0,6$ . Trova l'area della parte grigia.

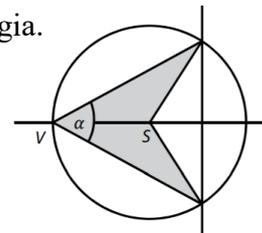
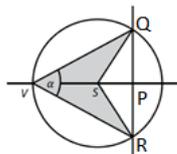
Soluzione:  $SQ, SR$  e  $SV$  sono 10 cm, perché sono il raggio.

L'angolo  $QSP$  è  $\alpha$ , quindi  $SP = SQ \cdot \cos \alpha = 6$  cm.

$PQ$  sarà per Pitagora  $PQ = \sqrt{100 - 36} = 8$  cm

$RQV$  ha area  $\frac{1}{2}VP \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128$  cm<sup>2</sup>  $QSR$  ha area  $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 48$  cm<sup>2</sup>

L'area grigia sarà  $128 - 48 = 80$  cm<sup>2</sup>



28) Un triangolo ha lati  $a$ ,  $\sqrt{5a}$ ,  $\sqrt{10a}$  con  $a$  numero reale, e angolo  $\alpha = 45^\circ$ . Trovare la lunghezza dei lati, sapendo che  $a$  è il lato opposto ad  $\alpha$ .

Soluzione:  $a = 5$  cm,  $b = 5$  cm,  $c = 5\sqrt{2}$  cm,  $\beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ$ ,  $A = \frac{25}{2}$  cm<sup>2</sup>

29) Trovare angoli e area di un poligono regolare di 20 lati di lunghezza 1 cm. Soluzione:  $A = 31,57$  cm<sup>2</sup>

30) Risolvere il triangolo in cui  $a = 4$  cm,  $b = 7$  cm,  $\alpha = 30^\circ$ .

Soluzione 1:  $c = 8$  cm,  $\beta = 61^\circ$ ,  $\gamma = 89^\circ$ ,  $A = 14$  cm<sup>2</sup>

Soluzione 2:  $c = 4,13$  cm,  $\beta = 119^\circ, \gamma = 31^\circ$ ,  $A = 7,22$  cm<sup>2</sup>

31) I lati di un triangolo sono 5, 6, 7 cm. Trovare le dimensioni degli angoli e l'area.

Soluzioni:  $\alpha = 44,4^\circ, \beta = 57,1^\circ, \gamma = 78,5^\circ$ ,  $A = 14,7$  cm<sup>2</sup>

32) Un triangolo ha lati  $a$ ,  $\sqrt{2a}$ ,  $3\sqrt{a}$  con  $a$  numero reale, e l'angolo  $\alpha = 45^\circ$ . Trovare la lunghezza dei lati.

Soluzioni:  $a = 5$  cm,  $\beta = \sqrt{10}$  cm,  $\gamma = \sqrt{45}$  cm

33) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono  $A[-1; 3]$ ,  $B[3; 5]$ ,  $C[7; -3]$ . Calcolare l'area del triangolo.

Soluzioni:  $a = \sqrt{80}, b = 10, c = \sqrt{20}, \alpha = 63,4^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 26,6^\circ, A = 20$

34) Un triangolo ha lati  $a$ ,  $\sqrt{2a}$ ,  $3\sqrt{a}$  con  $a$  numero reale, e l'angolo  $\alpha = 135^\circ$ . Trovare la lunghezza dei lati.

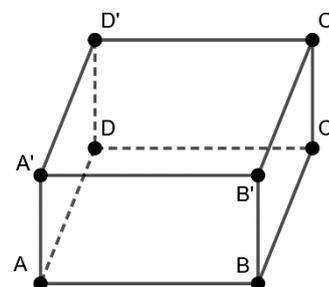
Soluzioni:  $a = 17$  cm,  $b = \sqrt{34}$  cm,  $c = \sqrt{153}$  cm

35) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono  $A[8; 15]$ ,  $B[-3; 7]$ ,  $C[4; -3]$ . Calcolare l'area del triangolo.

Soluzioni:  $a = \sqrt{149}, b = \sqrt{340}, c = \sqrt{185}, \alpha = 41,45^\circ, \beta = 91,05^\circ, \gamma = 47,5^\circ, A = 83$

36) Nel parallelepipedo a destra  $|AD| = |AB| = 4$  cm,  $|AA'| = 2$  cm. Trova la distanza tra A e il segmento  $B'D'$ .

Soluzione:  $\sqrt{12}$  cm, si disegna il triangolo  $AB'D'$  in cui  $|AB'| = |AD'| = \sqrt{20}$ ,  $|B'D'| = \sqrt{32}$  e l'altezza rispetto a  $B'D'$  è la soluzione.

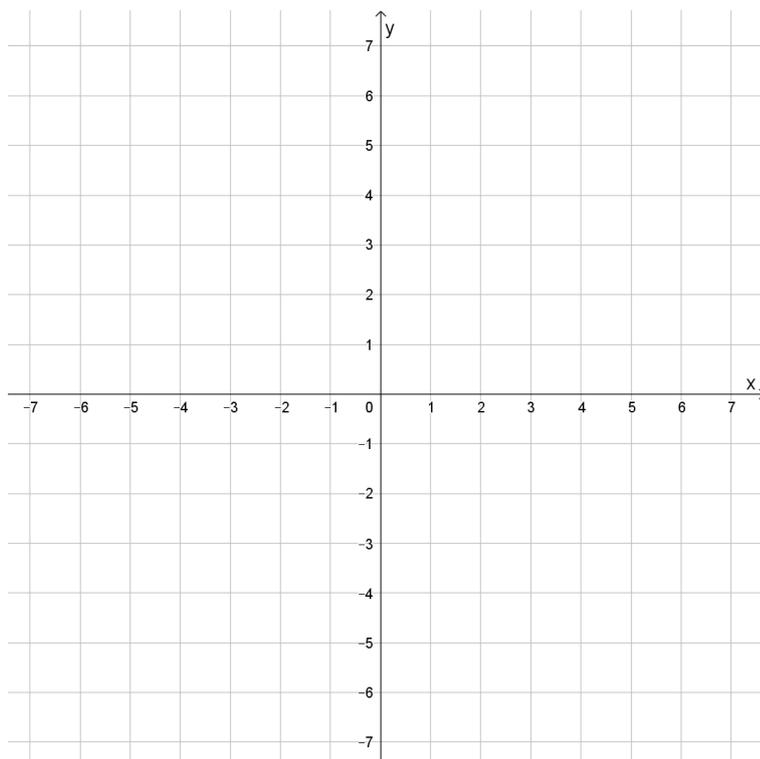


**ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI**

Gli esercizi in **neretto** sono un po' più difficili, le soluzioni sono a pagina 59.

Disegna sul piano cartesiano questi punti:

- 1) [4; 2]
- 2) [6; 6]
- 3) [-5; 0]
- 4) [-3; 5]
- 5) [-3; -4]
- 6) [0; 6]
- 7) [ $\sqrt{12}$ ; -2]
- 8) (4; 0°)
- 9) (5; 30°)
- 10) (6; 270°)
- 11) ( $\sqrt{18}$ ; 135°)
- 12) (3; 300°)
- 13) (10; 210°)
- 14) (7;  $\pi$ )
- 15) ( $5; \frac{3}{2}\pi$ )



- 16) Scrivi in coordinate polari i punti degli esercizi 1-7
- 17) Scrivi in coordinate cartesiane i punti degli esercizi 8-15

Trova il risultato:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>18) <math>3i - 4 + i - 2 =</math></li> <li>19) <math>2 - 3i + 5 + 4i =</math></li> <li>20) <math>(4 + 5i) + (3 - 2i) =</math></li> <li>21) <math>(3 - 5i) + (-3 + 4i) =</math></li> <li>22) <math>2 - i - 3 - i =</math></li> <li>23) <math>3 + 3i - 3 - 3i =</math></li> <li>24) <math>(3 - 4i) - (4 - 3i) =</math></li> <li>25) <math>i \cdot i =</math></li> <li>26) <math>i \cdot (1 + i) =</math></li> <li>27) <math>i \cdot i \cdot i =</math></li> <li>28) <math>i^2 =</math></li> <li>29) <math>i^3 =</math></li> <li>30) <math>i^4 =</math></li> <li>31) <math>i^5 =</math></li> <li>32) <math>i^{10} =</math></li> <li>33) <math>i^{21} =</math></li> <li><b>34) <math>i^{33} =</math></b></li> <li>35) <math>(-i)^2 =</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>36) <math>(-i)^3 =</math></li> <li>37) <math>2i \cdot (1 + i) =</math></li> <li>38) <math>2i \cdot (1 - i) =</math></li> <li>39) <math>(1 + i)(1 + i) =</math></li> <li>40) <math>(1 + i)(2 - 3i) =</math></li> <li>41) <math>(1 - i)^2 =</math></li> <li>42) <math>(2 + 3i)^2 =</math></li> <li>43) <math>(1 + i)^2 =</math></li> <li><b>44) <math>(1 + i)^3 =</math></b></li> <li>45) <math>(1 + i)^4 =</math></li> <li>46) <math>(1 + i)^5 =</math></li> <li>47) <math>(1 + i)^6 =</math></li> <li>48) <math>(1 + i)^7 =</math></li> <li>49) <math>(1 + i)^8 =</math></li> <li>50) <math>3 - 4i + 4i(2 - 3i) =</math></li> <li>51) <math>i(1 + i(1 + 1)) =</math></li> <li>52) <math>(\sqrt{3} + i)^2 =</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>53) <math>(\sqrt{3} + i)^3 =</math></li> <li>54) <math>(\sqrt{3} + i)^6 =</math></li> <li><b>55) <math>(\sqrt{3} + i)^9 =</math></b></li> <li>56) <math>(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)^2 =</math></li> <li>57) <math>(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)^3 =</math></li> <li>58) <math>(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)^4 =</math></li> <li>59) <math>(4 + 2i) \div i =</math></li> <li>60) <math>(3 - 2i) \div i =</math></li> <li>61) <math>(-4 + 8i) \div 2i =</math></li> <li>62) <math>\frac{-3-6i}{3i} =</math></li> <li>63) <math>(2 - 3i)(4 + 5i) =</math></li> <li>64) <math>(-1 - i)(1 - i) =</math></li> <li>65) <math>(3 - 5i)(2 - 5i) =</math></li> <li>66) <math>(8 - i)(1 + i) =</math></li> </ol> |
|---|---|---|

Trova le soluzioni di queste equazioni nell'insieme dei numeri complessi:

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| 67) $z^2 = -1$            | 103) $101z^2 + 2z + 1 = 0$                  |
| 68) $z^2 + 16 = 0$        | 104) $z^2 - 2z + 3 = 0$                     |
| 69) $z^2 = -100$          | 105) $z^2 - 4z + 3 = 0$                     |
| 70) $4z^2 + 1 = 0$        | 106) $z^2 + 5z + 13 = 0$                    |
| 71) $4z^2 + 9 = 0$        | 107) $z^2 - 10z + 27 = 0$                   |
| 72) $4z^2 - 9 = 0$        | 108) $3z^2 - 5z + 2 = 0$                    |
| 73) $z^2 - 2z + 2 = 0$    | 109) $3z^2 - 5z + 9 = 0$                    |
| 74) $z^2 + 2z = 0$        | 110) $z^2 + 3 = 0$                          |
| 75) $z^2 + 2z + 2 = 0$    | 111) $z^2 + 100z = 0$                       |
| 76) $z^2 + 2z + 5 = 0$    | 112) $z^2 - 4z + 8 = 0$                     |
| 77) $z^2 + 2z + 10 = 0$   | 113) $z^2 + 4z + 13 = 0$                    |
| 78) $z^2 + 2z + 17 = 0$   | 114) $z^2 - 10z + 34 = 0$                   |
| 79) $z^2 + 2z + 26 = 0$   | 115) $9z^2 + 25 = 0$                        |
| 80) $z^2 + 2z + 37 = 0$   | 116) $z^2 - 18z + 82 = 0$                   |
| 81) $z^2 + 2z + 50 = 0$   | 117) $z^2 + 20z + 101 = 0$                  |
| 82) $z^2 + 6z + 9 = 0$    | 118) $z^2 + 20z + 99 = 0$                   |
| 83) $z^2 - 6z + 13 = 0$   | 119) $z^2 - 20z + 104 = 0$                  |
| 84) $z^2 - 4z + 13 = 0$   | 120) $z^2 - 20z + 109 = 0$                  |
| 85) $z^2 + 4z + 4 = 0$    | 121) $z^2 - 6z + 18 = 0$                    |
| 86) $z^2 + 8z + 41 = 0$   | 122) $z^2 - 6z + 11 = 0$                    |
| 87) $z^2 + 10z + 41 = 0$  | 123) $z^2 - 5z + 5 = 0$                     |
| 88) $z^2 + 10z + 24 = 0$  | 124) $z^2 - 5z + 15 = 0$                    |
| 89) $z^2 + 10z + 21 = 0$  | 125) $z^2 + z + 1 = 0$                      |
| 90) $z^2 - 4z + 20 = 0$   | 126) $z^2 - z + 1 = 0$                      |
| 91) $z^2 + 4z + 20 = 0$   | 127) $52z^2 + 8z + 1 = 0$                   |
| 92) $z^2 - 8z + 20 = 0$   | 128) $z^2 + 8z + 52 = 0$                    |
| 93) $z^2 + 8z + 20 = 0$   | 129) $25z^2 - 6z + 1 = 0$                   |
| 94) $z^2 + 12z + 20 = 0$  | 130) $z^2 - 6z + 25 = 0$                    |
| 95) $z^2 + 21z + 20 = 0$  | 131) $5z^2 + 12z + 9 = 0$                   |
| 96) $z^2 + 29 = 4z$       | <b>132) <math>9z^2 + 12z + 5 = 0</math></b> |
| 97) $z^2 + 29 = 10z$      | 133) $4z^2 - 12z + 9 = 0$                   |
| 98) $2z^2 + 4z + 4 = 0$   | 134) $9z^2 - 12z + 4 = 0$                   |
| 99) $2z^2 + 2z + 1 = 0$   | 135) $z(z + 14) + 50 = 0$                   |
| 100) $5z^2 + 2z + 1 = 0$  | 136) $26 = z(10 - z)$                       |
| 101) $10z^2 + 2z + 1 = 0$ | 137) $-z^2 + 10z = 50$                      |
| 102) $65z^2 + 2z + 1 = 0$ | 138) $-z^2 + z + 1 = 0$                     |

Trova un'equazione con coefficienti reali che ha soluzioni:

- |                                      |                                 |                      |                 |
|--------------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------------|
| 139) $z_1 = 5i$                      | $z_2 = -5i$                     | 146) $z_1 = 1 + 3i$  | $z_2 = 1 - 3i$  |
| 140) $z_1 = 7i$                      | $z_2 = -7i$                     | 147) $z_1 = 2 + 3i$  | $z_2 = 2 - 3i$  |
| 141) $z_1 = 12i$                     | $z_2 = -12i$                    | 148) $z_1 = -2 + 3i$ | $z_2 = -2 - 3i$ |
| <b>142) <math>z_1 = 1 + i</math></b> | <b><math>z_2 = 1 - i</math></b> | 149) $z_1 = -1 + 5i$ | $z_2 = -1 - 5i$ |
| 143) $z_1 = 1 + 2i$                  | $z_2 = 1 - 2i$                  | 150) $z_1 = -3 - 3i$ | $z_2 = -3 + 3i$ |
| 144) $z_1 = 2 + i$                   | $z_2 = 2 - i$                   | 151) $z_1 = 4 - 3i$  | $z_2 = 4 + 3i$  |
| 145) $z_1 = 3 + i$                   | $z_2 = 3 - i$                   | 152) $z_1 = 8 + 6i$  | $z_2 = 8 - 6i$  |

## NUMERI COMPLESSI

Trova il valore di  $|z|$  e il prodotto  $z \cdot \bar{z}$  di questi numeri:

- |                    |                    |                     |                                   |
|--------------------|--------------------|---------------------|-----------------------------------|
| 153) $z = 1 - i$   | 159) $z = -3 - 4i$ | 165) $z = -10 - i$  | 171) $z = -\sqrt{3} + i$          |
| 154) $z = 3 + i$   | 160) $z = -3$      | 166) $z = -11i$     | 172) $z = \sqrt{32} - \sqrt{32}i$ |
| 155) $z = -2 - i$  | 161) $z = 2 + 5i$  | 167) $z = -3 + 5i$  | 173) $z = \sqrt{5} - 2i$          |
| 156) $z = 2 + 3i$  | 162) $z = -5i$     | 168) $z = -6 - 8i$  | 174) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$  |
| 157) $z = 3 + 4i$  | 163) $z = 10 + i$  | 169) $z = 60 + 80i$ | 175) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$   |
| 158) $z = -3 + 4i$ | 164) $z = 10 - i$  | 170) $z = 4$        |                                   |

176) Completa la tabella:

$i^{-15}$	$i^{-5}$	$i^{-4}$	$i^{-3}$	$i^{-2}$	$i^{-1}$	$i^0$	$i^1$	$i^2$	$i^3$	$i^4$	$i^5$	$i^6$	$i^7$	$i^{17}$	$i^{20}$	$i^{173}$
						1										

- 177) La somma di un numero con il suo coniugato è 0. Trova almeno una soluzione.  
 178) Il prodotto di un numero con il suo coniugato è 0. Trova almeno una soluzione.  
 179) Il prodotto di un numero con il suo coniugato è 13. Trova almeno una soluzione.  
 180) La divisione di un numero con il suo coniugato è 1. Trova almeno una soluzione.  
**181) La divisione di un numero con il suo coniugato è  $i$ . Trova almeno una soluzione.**  
 182) La divisione di un numero con il suo coniugato è  $-1$ . Trova almeno una soluzione.  
 183) La divisione di un numero con il suo coniugato è  $-i$ . Trova almeno una soluzione.

Calcola queste divisioni tra numeri complessi:

- |                             |                                  |                                   |
|-----------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 184) $(4 + 3i) \div i =$    | 191) $(5 + 15i) \div (1 - 2i) =$ | 198) $(-14 - 2i) \div (2 + 2i) =$ |
| 185) $\frac{5+15i}{5i} =$   | 192) $\frac{5+15i}{1+2i} =$      | 199) $\frac{14+2i}{-4+3i} =$      |
| 186) $\frac{3+8i}{2i} =$    | 193) $\frac{7+4i}{3-2i} =$       | 200) $\frac{2i}{1+i} =$           |
| 187) $\frac{-4+12i}{i^3} =$ | 194) $\frac{7+4i}{1+2i} =$       | 201) $\frac{-2i}{1-i} =$          |
| 188) $\frac{3-7i}{2i} =$    | 195) $\frac{25}{-3+4i} =$        | 202) $\frac{4}{-1+i} =$           |
| 189) $\frac{4-3i}{-i} =$    | 196) $\frac{25i}{-3+4i} =$       | 203) $\frac{1+5i}{2-3i} =$        |
| 190) $\frac{-3-3i}{2i} =$   | 197) $\frac{-25}{-3-4i} =$       | 204) $\frac{7+i}{5i-5} =$         |

Trasforma in punti e disegna sul piano di Gauss i seguenti numeri e i loro coniugati:

- |                |  |   |
|----------------|--|---|
| 205) $3 - 2i$  | 213) $-3 + 5i$   | 219) $4 \left( \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$         |
| 206) $2 + 5i$  | 214) $4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$          | 220) $2(\cos 0 + i \sin 0)$   |
| 207) $-4$      | 215) $6 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$          | 221) $4 \left( \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)$         |
| 208) $3i$      | 216) $\sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$   | 222) $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$                            |
| 209) $-2 - 2i$ | 217) $\sqrt{2} \left( \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$ | 223) $\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi$                          |
| 210) $-3 - 3i$ | 218) $3(\cos \pi + i \sin \pi)$  | 224) $\sqrt{18} \left( \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)$ |
| 211) $4 + 4i$  |  |   |
| 212) $3 - 5i$  |  |   |

Disegna sul piano di Gauss e trasforma da forma algebrica a forma goniometrica:

- |                             |                        |                       |                              |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------------|
| 225) $3 - 4i$               | 230) $-1 + i$          | 235) $10i$            | 240) $-\sqrt{8} + \sqrt{8}i$ |
| 226) $-12 + 5i$             | 231) $-\sqrt{12} + 2i$ | 236) $-3 + \sqrt{3}i$ | 241) $10 - 10i$              |
| 227) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ | 232) $3 - \sqrt{3}i$   | 237) $-10$            | 242) $i^7$                   |
| 228) $2 + \sqrt{12}i$       | 233) $-3 - 3i$         | 238) $10$             | 243) $\sqrt{3} + 3i$         |
| 229) $1 + i$                | 234) $-\sqrt{3} - 3i$  | 239) $2 - \sqrt{5}i$  | 244) $-\sqrt{2}i$            |

Trasforma da forma goniometrica a forma algebrica:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 245) $3(\cos 0 + i \sin 0)$                                | 251) $(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$    | 257) $5(\cos \pi + i \sin \pi)$                              |
| 246) $\sqrt{8}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ | 252) $8(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$   | 258) $8(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$        |
| 247) $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$        | 253) $7(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$                       | 259) $\sqrt{8}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$ |
| 248) $4(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$      | 254) $4(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$   | 260) $8(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$        |
| 249) $10(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$     | 255) $5(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$   | 261) $4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$          |
| 250) $6(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$      | 256) $4(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$ | 262) $\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})$         |

Calcola la somma e la differenza, il prodotto e la divisione tra queste coppie di numeri e scrivi il risultato in forma algebrica:

- |  |   |
|--|---|
| 263) $z_1 = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$          | $z_2 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$                              |
| 264) $z_1 = 2(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$        | $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$          |
| 265) $z_1 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$                                  | $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$          |
| 266) $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$          | $z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$          |
| 267) $z_1 = 6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$          | $z_2 = 4(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$        |
| 268) $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$          | $z_2 = 2(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$      |
| 269) $z_1 = 8(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$          | $z_2 = 8(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$        |
| 270) $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$          | $z_2 = 6(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$        |
| 271) $z_1 = 10(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$         | $z_2 = 4(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$        |
| 272) $z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$   | $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$ |
| 273) $z_1 = 5(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$          | $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$          |
| 274) $z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$ | $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$          |
| 275) $z_1 = \sqrt{12}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$  | $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$   |
| 276) $z_1 = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$        | $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$          |
| 277) $z_1 = 6(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$        | $z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$          |
| 278) $z_1 = 5(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$        | $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$          |

NUMERI COMPLESSI

279) Completa la tabella:

	Forma algebrica	Forma trigonometrica
$(1 + \sqrt{3}i)$		
$(1 + \sqrt{3}i)^2$		
$(1 + \sqrt{3}i)^3$		
$(1 + \sqrt{3}i)^4$		
$(1 + \sqrt{3}i)^5$		
$(1 + \sqrt{3}i)^6$		
$(1 + \sqrt{3}i)^n$		

280) Completa la tabella:

$z_1$	$z_2$	$ z_1 $	$ z_2 $	$ z_1 \cdot z_2 $	$\left  \frac{z_1}{z_2} \right $
$3 + 4i$	$1 + 2i$				
$5 - i$	$2 + 3i$				
$3 - i$	$2 - i$				
$-5 + 5i$	$7 + i$				
$7 + i$	$-5 + 5i$				
$3 + 5i$	$5 - 3i$				

Trova il risultato:

281)  $i^{33} =$

282)  $(1 + i)^4 =$

283)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 =$

**284)**  $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{14} =$

285)  $(1 + i)^7 =$

286)  $(-1 + i)^{13} =$

287)  $(\sqrt{3} + i)^5 =$

288)  $(1 + i)^{-1} =$

**289)**  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{13} =$

290)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15} =$

291)  $(-\sqrt{3} + i)^5 =$

292)  $(2 + 2i)^5 =$

293)  $(-1 + i)^{-3} =$

294)  $(\sqrt{2}i)^{26} =$

295)  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^9 =$

296)  $(-i)^{89} =$

297)  $(2 + 3i)^5 =$

Trova il risultato:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 298) $ 4 + 3i  =$                           | 304) $ (1 + 2i)^8  =$                                 | 310) $\left  \left( \frac{3-4i}{1-3i} \right)^4 \right  =$                                |
| 299) $ -6 + 8i  =$                          | 305) $\left  \frac{-5+i}{2-3i} \right  =$             | 311) $\left  \frac{123+456i}{456-123i} \right  =$   |
| 300) $\left  \frac{3+i}{2+i} \right  =$     | <b>306)</b> $\left  \frac{200i}{(-3+4i)^2} \right  =$ | <b>312)</b> $\left  5 \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \right  =$ |
| 301) $\left  \frac{4+2i}{2-i} \right  =$    | 307) $\left  \frac{15+12i}{-12-15i} \right  =$        | 313) $\left  7 \left( \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right) \right  =$        |
| 302) $\left  \frac{7+13i}{13-7i} \right  =$ | 308) $ (4 - 3i)(3 + 4i)  =$                           | 314) $ (2 - 3i)(2 + 3i)  =$   |
| 303) $ (1 + i)^8  =$                        | 309) $ (-3 + i)^{10}  =$                              |   |

Disegna sul piano di Gauss tutti i punti che hanno le caratteristiche richieste dall'esercizio. Riporta almeno 2 possibili soluzioni all'esercizio.

- |                          |                         |                          |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 315) $z = 3 + 4i$        | 328) $ z - 2  = 1$      | 341) $ z + 3 + 2i  = 2$  |
| 316) $z = 4 + 3i$        | 329) $ z - 2  = 2$      | 342) $ z + 1 - i  = 2$   |
| 317) $z = -3 - 4i$       | 330) $ z - i  = 1$      | 343) $ z + 3 - 4i  = 5$  |
| 318) $\bar{z} = 2 - i$   | 331) $ z + 2  = 2$      | 344) $ z - 2 + 2i  < 2$  |
| 319) $\bar{z} = 3 - 4i$  | 332) $ z + 3i  = 2$     | 345) $ \bar{z}  = 2$     |
| 320) $\bar{z} = -3 + 4i$ | 333) $z + \bar{z} = 0$  | 346) $ \bar{z}  < 3$     |
| 321) $ z  = 5$           | 334) $z + \bar{z} = 2$  | 347) $ \bar{z} - 2  = 2$ |
| 322) $ z  = 1$           | 335) $z + \bar{z} = -4$ | 348) $ z - \bar{z}  = 4$ |
| 323) $ z  \leq 1$        | 336) $ z  < 5$          | 349) $ z + \bar{z}  = 8$ |
| 324) $ z  \geq 3$        | 337) $0 <  z  < 1$      | 350) $z = i\bar{z}$      |
| 325) $2 <  z  < 4$       | 338) $ z  = -1$         | 351) $ z  = z$           |
| 326) $5 <  z  < 10$      | 339) $ z + 3  = 2$      | 352) $ z  = \bar{z}$     |
| 327) $ z - 1  = 1$       | 340) $ z + 2i  = 2$     | 353) $z = 2z$            |

Risolvi queste equazioni con  $z$  e  $\bar{z}$ :

- |  |  |
|--|--|
| 354) $z = 3i(z - i) - 5z$                      | 366) $\frac{z}{4z-8} = \frac{1}{z}$    |
| 355) $\frac{z}{6z-10} - \frac{1}{z} = 0$       | 367) $\frac{z}{4z-5} = \frac{1}{z}$    |
| 356) $z + 2\bar{z} = 9 - 5i$                   | 368) $5z + z^{-1} = 4$                 |
| 357) $\frac{z}{1+i} = \frac{3i+2}{1-i}$        | 369) $2z + 3i\bar{z} = 13 + 12i$       |
| 358) $z^2 - 8iz = 0$                           | 370) $2z + 3i\bar{z} = 10 + 10i$       |
| 359) $z + i\bar{z} = -1 + 5i$                  | 371) $2z - 5\bar{z} = 7i$              |
| 360) $z^2 - 4iz - 8 = 0$                       | 372) $z - 3iz = 5 + 10i$               |
| 361) $z^2 = 2i$                                | 373) $\frac{1}{z} = \frac{2}{\bar{z}}$ |
| 362) $z^2 = -i$                                | 374) $z - 2\bar{z} = 5 - 6i$           |
| 363) $2z + 4i\bar{z} = 10 - 10i$               | 375) $z + iz = 4 + 2i$                 |
| 364) $\left( \frac{2z}{z+1} \right)^2 + 9 = 0$ | 376) $3z = 34i - 5iz$                  |
| 365) $5z + z^{-1} = 2$                         | 377) $3z = 34i + 5iz$                  |

Trova tutte le soluzioni di queste equazioni e disegna sul piano di Gauss:

- |                 |                  |                 |                    |
|-----------------|------------------|-----------------|--------------------|
| 378) $z^2 = 1$  | 382) $z^3 = 1$   | 386) $z^8 = 1$  | 390) $z^3 = -8$    |
| 379) $z^2 = 2i$ | 383) $z^3 = 27i$ | 387) $z^4 = -i$ | 391) $z^3 = 8i$    |
| 380) $z^4 = 1$  | 384) $z^6 = 1$   | 388) $z^4 = 16$ | 392) $z^2 = 1 + i$ |
| 381) $z^4 = -1$ | 385) $z^6 = -1$  | 389) $z^3 = 8$  | 393) $z^{12} = 1$  |

## NUMERI COMPLESSI

- 394) Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale?
- Un numero intero è anche un numero reale
  - Un numero reale è necessariamente un numero razionale
  - Nessun numero complesso è un numero reale
  - Nessun numero reale è un numero complesso
- 395) Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale?
- La somma di due numeri complessi coniugati non è mai un numero reale
  - Il prodotto di due numeri complessi coniugati non è mai un numero reale
  - La somma di due numeri complessi coniugati è sempre un numero reale
  - Il quoziente di due numeri complessi coniugati è sempre un numero reale
- 396) Tutti i numeri complessi con modulo uguale a 4 nel piano sono rappresentati da ...
- una circonferenza
  - un quadrato
  - un insieme di 4 punti
  - nessuna delle precedenti risposte
- 397) Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale?
- Il prodotto di due numeri complessi è sempre un numero reale
  - La somma di due numeri complessi è sempre un numero reale
  - Il prodotto di due numeri complessi coniugati è sempre un numero reale
  - Il quadrato di un numero complesso è sempre un numero reale

## NUMERI COMPLESSI – MATURITÀ ITALIANA

- 398) Disegnare sul piano complesso tutti i punti per cui vale l'equazione  $|z - 4i| = |z + 8|$ . Formulare un'equazione in  $x, y$  che rappresenti l'insieme dei punti trovato. (2020)
- 399) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione  $|z - 2 + i| = 3$ . (2019)
- 400) Determinare i valori dei coefficienti reali  $p$  e  $q$  dell'equazione  $x^2 + px + q = 0$ , in modo tale che una soluzione sia  $x_1 = -3 + \sqrt{5}i$ . Determinare inoltre la seconda soluzione  $x_2$ . (2018)
- 401) Trovare il modulo del numero complesso  $\frac{(1+2i)^7}{(2-i)^5}$ . (anno 2016)
- 402) Trovare il modulo del numero complesso  $(1 - i\sqrt{3})^8$ . (2015)
- 403) Trovare tutti i numeri complessi la cui potenza seconda è uguale alla unità immaginaria  $i$ . Riportare le soluzioni nel piano di Gauss. (2014)
- 404) Dimostrare che per ogni numero reale  $m$  rappresenta la espressione  $\frac{m+i}{m-i}$  l'unità complessa. (2013)
- 405) Esprimere il numero complesso  $z = \log_{\frac{1}{3}} 9 + i \log_{\frac{1}{5}} 25$  in forma trigonometrica. Disegnare il numero sul piano di Gauss. (2012)
- 406) Risolvere nel campo complesso l'equazione:  $z^4 - i = 0$  e rappresentare le soluzioni nella circonferenza con centro nell'origine del piano di Gauss. (2010)
- 407) Risolvere l'equazione e rappresentare graficamente le soluzioni:  $z^3 = 1 + i$ . (2009)
- 408) Dato il numero complesso  $z = \sqrt{3} - i$  calcolare il valore di  $z^6$ . (2008)
- 409) Nel campo complesso risolvere  $2x^2 - 2x + 5 = 0$ . Riportare le soluzioni sul piano di Gauss. (2021)

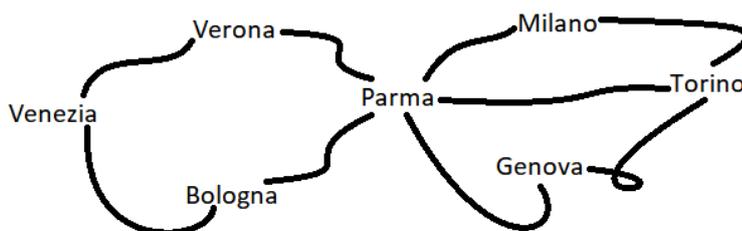
## SOLUZIONI:

- 132)  $z = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}i$     142)  $z^2 + 2z + 2 = 0$     181)  $n + ni$     284)  $16384i$     289)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$     306) 8    312) 5
- 401) 5    402) 256    403)  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$      $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$     404)  $\left| \frac{m+i}{m-i} \right| = \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}} = 1$
- 405)  $z = -2 - 2i = \sqrt{8} \left( \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)$     406)  $z = \cos \left( \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right), k \in \{0; 1; 2; 3\}$
- 407)  $z = \sqrt[6]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right)$     408)  $z^6 = -64$     409)  $\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$

## ESERCIZI CALCOLO COMBINATORIO

Le soluzioni di TUTTI gli esercizi sono a pagina 79.

- 1) Al compito di matematica Lucia e Ivan hanno ricevuto due voti diversi. Quante diverse possibilità di voti ci sono, se consideriamo solo i voti interi?
- 2) Fai l'esercizio precedente nel caso in cui possano anche ricevere i voti  $1^-$ ,  $2^-$ ,  $3^-$ ,  $4^-$ .
- 3) Nell'armadio ho cinque camicie (bianca / verde / azzurra / nera / grigia) e quattro maglioni (nero / grigio / verde / blu). In quanti modi diversi posso vestirmi?
- 4) Nell'armadio ho 3 camicie (bianca / azzurra / nera), 4 maglioni (nero / grigio / verde / blu) e 2 paia di pantaloni (jeans neri / jeans blu). In quanti modi diversi posso vestirmi?
- 5) Un ristorante ha ogni giorno un menù del pranzo con zuppa e piatto principale. Il cuoco sa cucinare 4 diverse zuppe (all'aglio / alla cipolla / alle patate / ai funghi) e 5 piatti principali (filetto / gulasch / stinco di maiale / costine / salmone). Dopo quanti giorni si potrà ripetere lo stesso menù?
- 6) Un ristorante ha ogni giorno un menù del pranzo con primo, pesce e dolce. Il cuoco sa cucinare solo 7 diversi tipi di pasta (carbonara / amatriciana / lasagne al forno / sugo di pomodoro / pesto / ragù / gamberetti e zucchine), 6 diversi piatti di pesce (salmone / branzino / orata / pescespada / tonno) e 4 diversi tipi di dolci (tiramisù / panna cotta / strudel / gelato). Dopo quanti giorni si potrà ripetere lo stesso menù?
- 7) Trova il numero totale di percorsi possibili per arrivare da Venezia a Torino.
- 8) Trova il numero totale di percorsi possibili per arrivare da Torino a Venezia.
- 9) Trova il numero totale di percorsi possibili per arrivare da Venezia a Torino e ritorno.
- 10) Trova il numero totale di percorsi possibili per arrivare da Venezia a Torino e ritorno, se si passa almeno una volta da Verona.
- 11) Trova il numero totale di percorsi possibili per arrivare da Venezia a Torino e ritorno senza passare da Genova.
- 12) Trova il numero totale di percorsi possibili per arrivare da Venezia a Torino e ritorno, se si passa almeno una volta da Milano.
- 13) Scrivi la quantità totale di codici con due cifre (all'inizio può esserci anche lo 0).
- 14) Scrivi la quantità totale di codici con due cifre diverse.
- 15) Scrivi la quantità totale di codici con tre cifre.
- 16) Scrivi la quantità totale di codici con tre cifre diverse.
- 17) Scrivi la quantità totale di codici con quattro cifre.
- 18) Scrivi la quantità totale di codici con quattro cifre diverse.
- 19) Scrivi la quantità totale di codici con dieci cifre diverse.
- 20) Cambiare l'ordine delle lettere di una parola si dice anagramma. Ad esempio tutti gli anagrammi della parola ORA sono: ora, oar, rao, roa, aor, aro. Trova il numero di anagrammi della parola ROMA.
- 21) Trova il numero di anagrammi della parola AMORE.
- 22) Trova il numero di anagrammi della parola SAREMO.
- 23) Una password ha 2 lettere. In quanti possibili modi può essere scritta la password? (26 lettere totali).
- 24) Trova tutte le possibili password formate da 3 lettere.
- 25) Trova tutte le possibili password formate da 3 lettere diverse.
- 26) Trova tutte le possibili password formate da 6 lettere.
- 27) Trova tutte le possibili password formate da 6 lettere diverse.
- 28) Trova tutte le possibili password formate da 6 lettere e un numero alla fine.

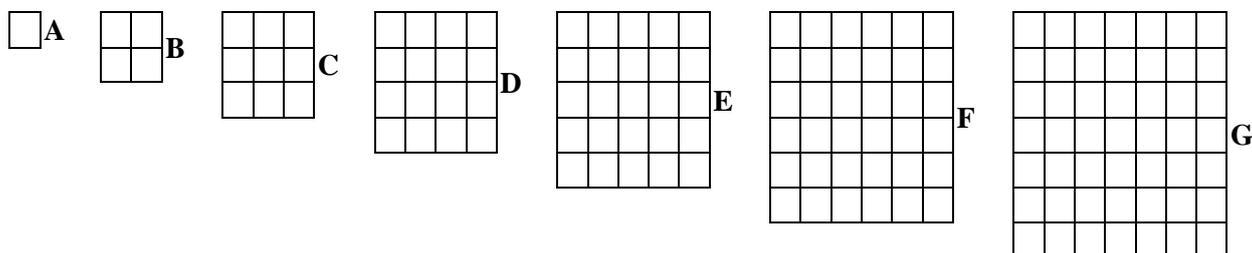


## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

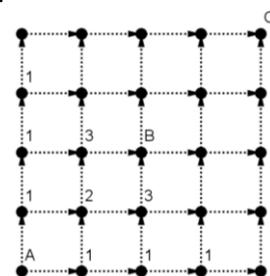
- 29) Trova tutte le possibili password formate da un numero all'inizio e poi 6 lettere.  
 30) Trova tutte le possibili password formate da un numero e 6 lettere.  
 31) Alessia, Barbara, Caterina e Diana fanno una gara di corsa. In quanti ordini diversi possono arrivare al traguardo?

In una classe con 19 ragazze e 10 ragazzi vengono scelti gli studenti per il discorso al ballo della maturità.

- 32) Quanti possibili modi di scelta ci sono se vengono scelti un ragazzo e una ragazza?  
 33) Quanti possibili modi di scelta ci sono se può essere scelta solo una persona?  
 34) Quanti possibili modi di scelta ci sono se vengono scelte due ragazze?  
 35) Quanti possibili modi di scelta ci sono se vengono scelti due ragazzi?  
 36) Quanti possibili modi di scelta ci sono se vengono scelte due persone, ma almeno una ragazza?  
 37) Quanti possibili modi di scelta ci sono se vengono scelte due persone, ma almeno un ragazzo?  
 38) Le classi della maturità di quest'anno hanno 27, 28, 25 studenti. In quanti modi si può scegliere una delegazione di studenti, in cui c'è uno studente per ogni classe?  
 39) Quanti sono i numeri di 4 cifre? (è possibile avere anche 0 all'inizio)  
 40) Quanti sono i numeri con al massimo 4 cifre? (è possibile avere anche 0 all'inizio)  
 41) Quanti sono i numeri di 4 cifre formati solo da cifre pari?  
 42) Quanti sono i numeri di 4 cifre formati solo da cifre dispari?  
 43) Per semplicità diciamo che la targa automobilistica ceca ha forma NLN NNNN, dove L è una lettera e N un numero. Quante possibili targhe è possibile avere?  
 44) La targa automobilistica italiana ha forma LL NNN LL, dove L è una lettera e N un numero. Quante possibili targhe è possibile avere?  
 45) Per ognuna delle figure sotto trova il numero totale di quadrati (grandi e piccoli):



- 46) Per ognuna delle figure in alto trova il numero totale di quadrati e rettangoli (grandi e piccoli)  
 47) In un quadrato formato da  $10 \times 10$  piccoli quadrati, quanti quadrati grandi e piccoli totali ci sono?  
 48) In un quadrato formato da  $10 \times 10$  piccoli quadrati, quanti quadrati e rettangoli totali ci sono?  
 49) Nella figura a destra si parte dal punto A e si può andare solo in alto o a destra. I numeri sono la quantità totale di percorsi possibili per andare da A al punto su cui si trova il numero. Quanti sono i percorsi per arrivare in B?  
 50) Nella figura a destra trova tutti i percorsi possibili per arrivare in C.  
 51) Quanti numeri naturali si possono formare usando al massimo una volta le cifre 1, 2?  
 52) Quanti numeri naturali si possono formare usando al massimo una volta le cifre 1, 2, 3?  
 53) Quanti numeri naturali si possono formare usando al massimo una volta le cifre 1, 2, 3, 4?  
 54) Quanti numeri naturali si possono formare usando al massimo una volta le cifre 1, 2, 3, 4, 5?  
 55) Trova il legame tra le risposte degli esercizi 51-54.



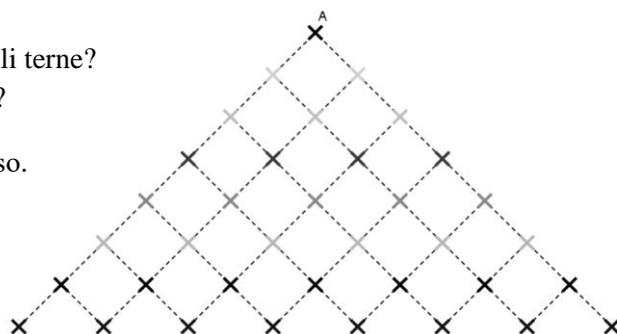
- 56) Quanti numeri naturali si possono formare usando esattamente una volta le cifre 1, 2?  
 57) Quanti numeri naturali si possono formare usando esattamente una volta le cifre 1, 2, 3?  
 58) Quanti numeri naturali si possono formare usando esattamente una volta le cifre 1, 2, 3, 4?  
 59) Quanti numeri naturali si possono formare usando almeno una volta le cifre 1, 2?  
 60) Dario, Emanuela, Fabio e Giovanna vogliono giocare a "Non t'arrabbiare". Ci sono a disposizione 4 colori: rosso, blu, verde e giallo. In quanti diversi modi possono essere scelti i colori?

Il professore di fisica vuole interrogare degli studenti in una classe di 29 studenti, di cui 10 maschi.

- 61) Quante sono le possibili coppie di soli maschi che può interrogare?
- 62) Quante sono le possibili coppie di sole femmine che può interrogare?
- 63) Quante sono le possibili coppie di un maschio e una femmina che può interrogare?
- 64) Quante sono le possibili coppie che può interrogare?
- 65) Se vuole interrogare 3 studenti maschi, quante sono le possibili terne?
- 66) Se vuole interrogare 3 studenti, quante sono le possibili terne?

Nella figura a destra si parte dal punto A e si può andare solo in basso.

- 67) Scrivi il numero dei percorsi più brevi per andare da A ad ogni punto in fondo.

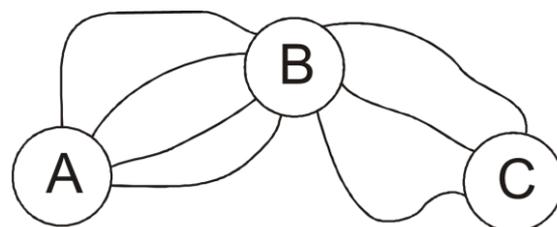


Per disegnare una bandiera di 3 strisce formata da 3 colori diversi ho a disposizione i colori bianco, giallo, rosso, blu, verde.

- 68) Quante possibili bandiere posso disegnare (bianco/giallo/rosso è diverso da rosso/giallo/bianco)?
- 69) Quante bandiere hanno il colore blu?
- 70) Quante bandiere hanno il colore blu al centro?
- 71) Quante bandiere non hanno il colore bianco?
- 72) Quante bandiere hanno il giallo e il blu?
- 73) Quante bandiere hanno il giallo o il blu?
- 74) Con l'alfabeto arabo base si possono formare 756 password diverse formate da due lettere diverse. Quante lettere ci sono nell'alfabeto arabo?
- 75) Con l'alfabeto arabo esteso si possono formare 1156 password diverse formate da due lettere. Quante sono le lettere in più?

Formo un numero di 5 cifre usando una sola volta le cifre 1, 2, 3, 4, 5.

- 76) Quanti possibili numeri ci sono?
- 77) Fra questi numeri, quanti sono pari e quanti sono dispari?
- 78) Quanti sono divisibili per 3?
- 79) Quanti sono divisibili per 5?
- 80) Quanti sono divisibili per 6?
- 81) Quanti sono divisibili per 9?
- 82) Quanti sono divisibili per 15?
- 83) Quanti sono divisibili per 10?



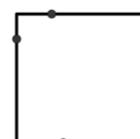
- 84) Nel disegno in alto quanti sono i possibili percorsi A-C-A?
- 85) Nel disegno in alto quanti sono i possibili percorsi A-C-A, se almeno una delle 7 strade viene usata 2 volte?

Il lunedì è un bellissimo giorno, perché è il primo giorno di scuola della settimana e perché l'orario scolastico ha queste materie: chimica, biologia, fisica, matematica, ceco, inglese e italiano.

- 86) In quanti modi diversi possono essere ordinate le materie?
- 87) Se all'inizio ci sono tutte le materie scientifiche e dopo le materie linguistiche, quante possibilità ci saranno?
- 88) Se l'italiano sarà subito dopo la matematica, quante possibilità ci saranno?
- 89) Se l'italiano sarà dopo la matematica, quante possibilità ci saranno?
- 90) Se le materie in italiano saranno insieme, e insieme saranno le altre materie, quante possibilità ci saranno?
- 91) Se due materie in italiano non saranno mai di seguito, quanti diversi modi ci saranno?

Disegno un poligono che ha i vertici su ogni punto grigio del quadrato a destra.

- 92) Quanti possibili triangoli posso disegnare?
- 93) Quanti possibili quadrilateri?



## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

Disegna un poligono che ha i vertici su ogni punto grigio del quadrato a destra, ogni vertice è su un lato diverso.

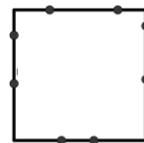
94) Quanti possibili triangoli posso disegnare?

95) Quanti possibili quadrilateri?

96) Rispondi alle domande precedenti, se ci fosse un quadrato con 3 punti grigi per lato.

97) Rispondi alle domande precedenti, se ci fosse un quadrato con 4 punti grigi per lato.

98) Rispondi alle domande precedenti, se ci fosse un quadrato con 5 punti grigi per lato.



99) Ad un torneo partecipano 6 squadre. In quanti modi possono arrivare sul podio (i primi tre posti)?

100) Ad una lotteria si vendono 250 biglietti per 5 premi diversi. In quanti modi possono essere estratti i biglietti?

101) Ad una lotteria si vendono 250 biglietti per 5 premi uguali. In quanti modi possono essere estratti i biglietti?

102) Ad un esame lo studente deve estrarre 2 domande di 3. In quanti modi possono essere estratte queste domande?

103) Ad un esame lo studente deve estrarre 2 domande di 4. In quanti modi possono essere estratte queste domande?

104) Ad un esame lo studente deve estrarre 2 domande di 5. In quanti modi possono essere estratte queste domande?

105) Ad un esame lo studente deve estrarre 2 domande di 10. In quanti modi possono essere estratte queste domande?

106) Ad un esame lo studente deve estrarre 2 domande di  $n$ . In quanti modi possono essere estratte queste domande?

107) Ad un esame lo studente deve estrarre 3 domande di 4. In quanti modi possono essere estratte queste domande?

108) Ad un esame lo studente deve estrarre 3 domande di 6. In quanti modi possono essere estratte queste domande?

109) Ad un esame lo studente deve estrarre 3 domande di  $n$ . In quanti modi possono essere estratte queste domande?

110) Ad un esame lo studente deve estrarre 5 domande di 10. In quanti modi possono essere estratte queste domande?

111) Quanti anagrammi posso fare con le lettere della parola PARCO?

112) Quanti anagrammi posso fare con le lettere della parola PAZZO?

113) Quanti anagrammi posso fare con le lettere della parola POZZO?

114) Quanti anagrammi posso fare con le lettere della parola MAMMA?

115) Quanti anagrammi posso fare con le lettere della parola POPOLO?

116) Quanti anagrammi posso fare con le lettere della parola CALCOLO?

117) Quanti anagrammi posso fare con le lettere della parola ANAGRAMMA?

118) In una classe di 10 studenti vengono scelti 2 studenti. Quante possibili coppie si possono formare?

119) In una classe di 15 studenti vengono scelti 3 studenti. In quanti modi possono essere scelti?

120) In una classe di 20 studenti vengono scelti 4 studenti. In quanti modi possono essere scelti?

121) In quanti modi posso scegliere 1 cioccolatino da una scatola con 6 cioccolatini diversi?

122) In quanti modi posso scegliere 2 cioccolatini da una scatola con 6 cioccolatini diversi?

123) In quanti modi posso scegliere 3 cioccolatini da una scatola con 6 cioccolatini diversi?

124) In quanti modi posso scegliere 4 cioccolatini da una scatola con 6 cioccolatini diversi?

125) In quanti modi posso scegliere 5 cioccolatini da una scatola con 6 cioccolatini diversi?

126) In quanti modi posso scegliere 6 cioccolatini da una scatola con 6 cioccolatini diversi?

127) Trova tutti i possibili modi in cui possono essere ordinati i simboli ☹☹☺☺☺☺.

128) Trova tutti i possibili modi in cui possono essere ordinati i simboli ↑↑↑↑→→

129) In quanti modi puoi fare 4 passi verso nord e 2 passi verso est?

130) In quanti modi puoi fare 5 passi verso nord e 3 passi verso est?

131) In quanti modi puoi fare 5 passi verso nord e 5 passi verso est?

132) Una fioraia vende: rose, gigli, garofani, tulipani, gladioli, margherite, girasoli, crisantemi, camelie. In quanti modi si può formare un mazzo di 5 fiori, in cui c'è al massimo un fiore per ogni tipo?

133) In quanti modi diversi posso mettere 2 monete uguali in 3 portafogli diversi (anche tutti in un portafogli)?

134) In quanti modi diversi posso mettere 3 monete uguali in 3 portafogli diversi?

135) In quanti modi diversi posso mettere 4 monete uguali in 3 portafogli diversi?

136) In quanti modi diversi posso mettere 4 monete uguali in 4 portafogli diversi?

Trova quanti percorsi formano la stessa parola in questi rettangoli:

- 137)            138)            139)            140)            141)            142)            143)

E	V
V	A

L	U	C
U	C	A

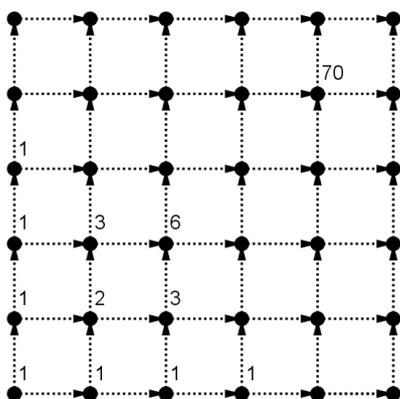
C	A	R	L
A	R	L	A

M	A	R
A	R	C
R	C	O

R	E	N
E	N	A
N	A	T
A	T	A

A	N	T	O	N
N	T	O	N	I
T	O	N	I	O

A	L	E	S	S	A
L	E	S	S	A	N
E	S	S	A	N	D
S	S	A	N	D	R
S	A	N	D	R	O



144) Completa il numero dei percorsi per ogni punto nel quadrato a sinistra, se si parte in basso a sinistra e si può andare solo in alto o a destra.

145) In una squadra di hockey ci sono 20 giocatori di movimento e due portieri. Normalmente giocano 5 giocatori di movimento e 1 un portiere. In quanti modi diversi può essere scelto il gruppo che gioca?

Nel **poker** ci sono 52 carte da 1 a 13 (Asso – K) con 4 semi diversi (cuori, quadri, fiori, picche). Scelgo 3 carte:

- 146) Quanti sono i modi in cui posso sceglierle?
- 147) Quanti sono i modi in cui le tre carte hanno valore diverso?
- 148) Quanti sono i modi in cui le tre carte hanno lo stesso valore?
- 149) Quanti sono i modi in cui almeno due carte hanno lo stesso valore?
- 150) Quanti sono i modi in cui esattamente due carte hanno lo stesso valore?
- 151) Quanti sono i modi in cui tre carte hanno lo stesso seme (cioè solo cuori o solo picche...)?
- 152) Quanti sono i modi in cui le tre carte hanno seme diverso?
- 153) Quanti sono i modi in cui esattamente due delle tre carte hanno lo stesso seme?
- 154) Quanti sono i modi in cui le tre carte hanno valore e seme diverso?
- 155) Quanti sono i modi in cui le tre carte formano una scala?
- 156) Quanti sono i modi in cui è presente almeno un Asso?
- 157) Quanti sono i modi in cui non è presente il due di fiori?

Se adesso ricevo 5 carte:

- 158) Quanti sono i modi in cui posso ricevere le carte?
- 159) Quanti sono i modi in cui non è presente nessun asso?
- 160) Quanti sono i modi in cui è presente almeno un asso?
- 161) Quanti sono i modi in cui posso ricevere 5 carte dello stesso seme?
- 162) Quanti sono i modi in cui posso ricevere un poker?
- 163) Quanti sono i modi in cui posso ricevere una scala reale (cioè dello stesso seme e consecutive)?
- 164) Quanti sono i modi in cui posso avere un full (un tris e una coppia)?

In un **quiz** posso ci sono 10 domande e si può rispondere solo SÌ e NO.

- 165) In quanti possibili modi si può rispondere al quiz?
- 166) Quanti di questi modi hanno esattamente 1 NO?
- 167) Quanti di questi modi hanno esattamente 2 NO?
- 168) Quanti di questi modi hanno esattamente 3 NO?
- 169) Quanti di questi modi hanno esattamente 5 NO?
- 170) Quanti di questi modi hanno esattamente 5 risposte giuste?
- 171) Quanti di questi modi hanno esattamente 8 risposte giuste?
- 172) Quanti di questi modi hanno almeno 5 risposte giuste?
- 173) Quanti di questi modi hanno almeno 8 risposte giuste?

## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

- 174) Quanti di questi modi hanno al massimo 2 risposte sbagliate?  
175) Quanti di questi modi hanno più di 2 risposte sbagliate?

In un **test** ci sono 9 domande e si può rispondere A, B, C per ogni domanda, solo una risposta è giusta:

- 176) Quanti sono i possibili modi per rispondere al test?  
177) Quanti sono i possibili modi in cui si indovinano tutte le risposte?  
178) Quanti sono i possibili modi in cui si sbagliano tutte le risposte?  
179) Quanti sono i possibili modi in cui si sceglie esattamente 3 volte B?  
180) Quanti sono i possibili modi in cui si indovinano esattamente 3 risposte?  
181) Quanti sono i possibili modi in cui si indovinano più di 7 risposte?  
182) Quanti sono i possibili modi in cui si indovinano esattamente 7 risposte?  
183) Quanti sono i possibili modi in cui si indovinano almeno 7 risposte?

Tiro **un dado**. Calcola:

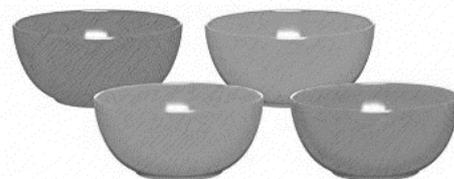
- 184) Quanti sono i modi per cui esce un numero pari  
185) Quanti sono i modi per cui esce un numero maggiore di 4  
186) Quanti sono i modi per cui esce un numero minore di 5  
187) Quanti sono i modi per cui esce un numero al massimo uguale a 5  
188) Quanti sono i modi per cui esce un numero primo

Tiro **due dadi di colore diverso**. Calcola:

- 189) Quanti sono i modi possibili  
190) Quanti sono i modi per cui la somma è un numero pari  
191) Quanti sono i modi per cui la somma è 7  
192) Quanti sono i modi per cui la somma è 11  
193) Quanti sono i modi per cui la somma è maggiore di 7  
194) Quanti sono i modi per cui la somma è almeno 7  
195) Quanti sono i modi per cui la somma è minore di 7  
196) Quanti sono i modi per cui la somma è al massimo 7  
197) Quanti sono i modi per cui la somma è un numero primo

Tiro **tre dadi di colore diverso**. Calcola:

- 198) Quanti sono i modi possibili.  
199) Quanti sono i modi per cui la somma è 2  
200) Quanti sono i modi per cui la somma è 3  
201) Quanti sono i modi per cui la somma è 4  
202) Quanti sono i modi per cui la somma è 18  
203) Quanti sono i modi per cui la somma è 17  
204) Quanti sono i modi per cui la somma è 16  
205) Quanti sono i modi per cui la somma è più di 10 (ragiona)  
206) Ho 3 palline e posso metterle nelle quattro ciotole a destra. In quanti modi possono mettere le palline nelle ciotole? (ad esempio 2 nella prima e 1 nella seconda)



Considera tutti i numeri naturali di 3 cifre formati solo dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5 in cui una cifra si può trovare al massimo una volta:

- 207) Quanti sono i numeri in totale?  
208) Quanti di questi numeri sono divisibili per 2?  
209) Quanti di questi numeri sono divisibili per 3?  
210) Quanti di questi numeri sono divisibili per 5?  
211) Quanti di questi numeri sono divisibili per 6?  
212) Quanti di questi numeri iniziano con 4?  
213) Quanti di questi numeri non hanno il numero 3?  
214) Quanti di questi numeri sono formati solo da cifre dispari?

Considera tutti i numeri naturali di 3 cifre formati solo dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5:

- 215) Quanti sono i numeri in totale?
- 216) Quanti di questi numeri sono divisibili per 2?
- 217) Quanti di questi numeri sono divisibili per 5?
- 218) Quanti di questi numeri iniziano con 4?
- 219) Quanti di questi numeri non hanno il numero 3?
- 220) Quanti di questi numeri sono formati solo da cifre dispari?

Ho a disposizione le cifre 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

- 221) In quanti modi posso formare un numero di 4 cifre?
- 222) In quanti modi posso formare un numero di 4 cifre, se non si ripete mai la stessa cifra?
- 223) Quanti di questi numeri hanno le cifre in ordine non crescente?
- 224) Quanti di questi numeri hanno le cifre in ordine decrescente?
- 225) Quanti di questi numeri hanno le cifre in ordine non decrescente?
- 226) Quanti di questi numeri hanno le cifre in ordine crescente?

Fra tutti i numeri naturali di 4 cifre:

- 227) quanti sono quelli in cui la somma delle cifre è 2?
- 228) quanti sono quelli in cui la somma delle cifre è 3?
- 229) quanti sono quelli in cui la somma delle cifre è 4?
- 230) quanti sono quelli in cui la somma delle cifre è 5?

- 231) Quanti sono i numeri di 5 cifre, in cui la somma delle cifre è 6?
- 232) Quanti sono i numeri di 5 cifre, in cui la somma delle cifre è al massimo 6?
- 233) Quanti sono i numeri di 5 cifre, in cui la somma delle cifre è almeno 6?

234) Nel gioco "PIOVE" ci sono 32 carte. In quanti modi diversi posso ricevere 4 carte?

In un negozio vendono 3 tipi di lecca-lecca: alla fragola, alla ciliegia, all'arancia:

- 235) In quanti modi posso comprare 4 lecca-lecca?
- 236) In quanti modi posso comprare 6 lecca-lecca?
- 237) In quanti modi posso comprare 6 lecca-lecca, se voglio almeno un lecca-lecca per ogni gusto?
- 238) In quanti modi posso comprare 6 lecca-lecca, se non mi piace il gusto fragola?

Un byte è formato da 8 bit, e ha la forma del tipo 00110111.

- 239) Quanti possibili byte diversi ci sono?
- 240) Quanti sono i byte con esattamente 1 zero?
- 241) Quanti sono i byte con esattamente 2 zeri?
- 242) Quanti sono i byte con esattamente 4 zeri?
- 243) Quanti sono i byte con almeno 3 zeri?
- 244) Quanti sono i byte con al massimo 4 zeri?

La partita di hockey sul ghiaccio tra Egitto e Cuba finisce 4-3. Indichiamo con E un gol dato dall'Egitto, con C un gol di Cuba. EEC significa 1-0, 2-0, 2-1:

- 245) Quanti sono i possibili andamenti della partita?
- 246) Quanti sono i possibili andamenti della partita, se l'Egitto non è mai in svantaggio?

Ho 8 palline e posso metterle in tre ciotole.

- 247) In quanti modi possono mettere le palline nelle ciotole?
- 248) In ogni ciotola ci deve essere almeno una pallina. In quanti modi posso mettere le palline?

## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

Ho 10 monete uguali e posso metterle in tre portafogli diversi.

249) In quanti modi possono mettere le monete nei portafogli?

250) In ogni portafogli ci devono essere almeno due monete. In quanti modi possono mettere le monete?

Ci sono 3 inglesi, 4 francesi e 5 tedeschi.

251) In quanti modi diversi possono mettersi in fila?

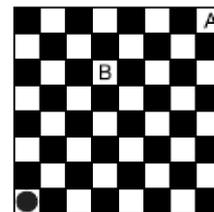
252) In quanti modi diversi possono mettersi in fila, se le persone della stessa nazione sono unite?

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa.

253) Quanti sono i percorsi che arrivano a B?

254) Quanti sono i percorsi che arrivano ad A?

255) Quanti sono i percorsi che arrivano ad A passando da B?



256) Nell'armadio ho cinque camicie e quattro maglioni. In quanti modi diversi posso vestirmi?

257) Quante password sono possibili con 1 numero e 3 lettere?

In un negozio vendono penne rosse, blu, verdi e nere della stessa marca:

258) In quanti modi diversi posso comprare 2 penne?

259) In quanti modi diversi posso comprare 4 penne?

260) In quanti modi diversi posso comprare 8 penne?

261) Se voglio comprare almeno una penna per colore, in quanti modi diversi posso comprare 8 penne?

262) Se non voglio comprare penne verdi, in quanti modi diversi posso comprare 8 penne?

263) In quanti modi possono essere scelti due studenti in una classe di 25 alunni?

264) In quanti modi possono essere scelti 5 studenti in una classe di 25 alunni?

265) In quanti modi possono essere scelti 20 studenti in una classe di 25 alunni?

266) Se sono un allenatore di calcio, in quanti modi diversi posso fare una formazione se devo mettere in campo uno dei 3 portieri, 3 dei 5 difensori, 4 dei 7 centrocampisti, 3 dei 6 attaccanti a disposizione?

267) In una associazione con 100 soci devo scegliere 1 presidente, 1 segretario e 2 consiglieri. In quanti modi diversi lo posso fare?

268) Quante sono le possibili parole di 8 lettere in cui si alternano consonanti (21 possibili) e vocali (5 possibili)?

269) Sul quaderno disegno 3 punti non allineati. Quante rette passano da due di questi punti?

270) Sul quaderno disegno 4 punti, mai 3 sulla stessa retta. Quante rette passano da due di questi punti?

271) Sul quaderno disegno 5 punti, mai 3 sulla stessa retta. Quante rette passano da due di questi punti?

272) Sul quaderno disegno 10 punti, mai 3 sulla stessa retta. Quante rette passano da due di questi punti?

273) In quanti modi posso avere 20Kč solo con monete da 1Kč e 2Kč?

274) In quanti modi posso avere 20Kč solo con monete da 1Kč, 2Kč e 5Kč?

275) Nello sviluppo di  $(x + \frac{1}{x})^8$  qual è il valore del termine senza  $x$ ?

276) Quanti 0 ci sono alla fine del numero  $40!$  ?

277) Quante volte si può dividere il numero  $30!$  per 2?

Calcola senza calcolatrice:

278)  $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

280)  $\binom{10\ 000}{4\ 999} - \binom{10\ 000}{5\ 001}$

279)  $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

281)  $\frac{10\ 002!}{10\ 000!}$

282) Sviluppa  $(i - 1)^{10}$  con il triangolo di Pascal.

283) Sviluppata  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$  con il triangolo di Pascal.

Calcola senza calcolatrice:

$$284) \frac{1\,001!}{999!} =$$

$$289) \frac{(n-1)!}{(n-2)!} =$$

$$294) \frac{999\,999!}{1\,000\,000!} =$$

$$299) \frac{101!}{99! \cdot 2!} =$$

$$285) \frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$290) 5! =$$

$$295) \frac{25!}{23!} =$$

$$300) \frac{10\,001!}{9\,999! \cdot 2!} =$$

$$286) \frac{(n+1)!}{(n-1)!} =$$

$$291) \frac{20!}{19!} =$$

$$296) \frac{30!}{28!} =$$

$$301) \frac{18!}{20!} =$$

$$287) \frac{n!}{(n+2)!} =$$

$$292) \frac{50!}{48!} =$$

$$297) \frac{10!}{5! \cdot 5!} =$$

$$288) \frac{8!}{5! \cdot 3!} =$$

$$293) \frac{100\,000!}{99\,998!} =$$

$$298) \frac{15!}{12! \cdot 3!} =$$

Risolvi queste equazioni:

$$302) \frac{n!}{(n-2)!} = 5n + 7$$

$$308) \binom{k+1}{2} + \binom{k}{1} + \binom{k}{0} = 5k - 5$$

$$303) \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + n = 24$$

$$309) \binom{k+5}{k+3} = 6$$

$$304) (n+2)! = (n+1)! + n!$$

$$310) \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = 11$$

$$305) \frac{(n+1)!}{n!} + \frac{n!}{(n-1)!} = 49$$

$$311) \binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} = 6$$

$$306) \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{56} = 0$$

$$312) \binom{n}{7} = \binom{n}{5}$$

$$307) \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{16}{(n+1)!}$$

$$313) \binom{n}{73} = \binom{n}{81}$$

## ESERCIZI PROBABILITÀ

### ROULETTE

Nella roulette ci sono 37 numeri da 0 a 36. Lo 0 non è né pari né dispari. Calcola:

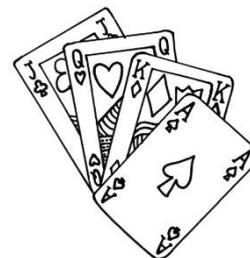
- 314) La probabilità che esca un numero pari  
 315) La probabilità che esca un numero nero  
 316) La probabilità che esca il 13  
 317) La probabilità che esca un numero pari e nero  
 318) La probabilità che esca un numero pari o nero  
 319) La probabilità che esca un numero maggiore di 18  
 320) La probabilità che non esca 0



### POKER

Scelgo a caso **una carta** da un mazzo da poker da 52 carte. Calcola la probabilità di estrarre:

- 321) una carta di cuori  
 322) un 8  
 323) un 8 di cuori  
 324) un 8 o una carta di cuori



Scelgo a caso **due carte** da un mazzo da poker da 52 carte. Calcola la probabilità di estrarre:

- 325) due carte di valore diverso  
 326) due carte dello stesso valore  
 327) due assi  
 328) almeno un asso  
 329) almeno una figura (J, Q, K)  
 330) due carte dello stesso seme  
 331) due carte di seme diverso  
 332) due carte di fiori

Scelgo a caso **tre carte** da un mazzo da poker da 52 carte. Calcola la probabilità di estrarre:

- 333) tre carte dello stesso valore  
 334) tre carte tutte di valore diverso  
 335) esattamente due carte dello stesso valore  
 336) almeno due carte dello stesso valore  
 337) tre carte dello stesso seme  
 338) tre carte di seme diverso  
 339) nessun due  
 340) almeno un asso

Gioco a poker con un mazzo da 52 carte e ho in mano **cinque carte**. Calcola la probabilità:

- 341) di fare poker d'assi  
 342) di fare poker  
 343) di fare scala reale

### MONETE

Lancio una moneta **due volte**. Calcola la probabilità che:

- 344) esca due volte testa  
 345) non esca mai testa  
 346) esca due volte croce  
 347) esca almeno una volta croce



Testa

Croce

Lancio una moneta **quattro volte**. Calcola la probabilità che:

- 348) esca quattro volte testa  
 349) non esca mai croce  
 350) esca tre volte testa  
 351) esca almeno due volte croce

Calcola la probabilità che esca sempre testa se lancio una moneta:

- 352) 2 volte  
 353) 5 volte  
 354) 10 volte  
 355) 100 volte

Lancio **5 volte** una moneta. Calcola:

- 356) la probabilità che esca solo croce  
 357) la probabilità che esca esattamente 1 volta croce  
 358) la probabilità che esca esattamente 2 volte croce  
 359) la probabilità che esca esattamente 3 volte croce  
 360) la probabilità che esca al massimo 3 volte croce  
 361) la probabilità che esca almeno 3 volte croce  
 362) la probabilità che non esca croce  
 363) la probabilità che croce esca al massimo 2 volte

Lancio una moneta **6 volte**. Calcola la probabilità:

- 364) che esca esattamente 3 volte testa  
 365) che esca esattamente 4 volte testa  
 366) che esca almeno 4 volte testa  
 367) che esca al massimo 4 volte testa  
 368) che esca testa meno di 4 volte  
 369) che esca testa più di 4 volte

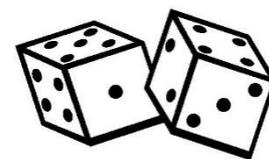
Lancio una moneta **8 volte**. Calcola la probabilità che testa:

- 370) esca esattamente 0 volte  
 371) esca esattamente 1 volta  
 372) esca esattamente 2 volte  
 373) esca esattamente 3 volte  
 374) esca esattamente 4 volte  
 375) esca esattamente 5 volte  
 376) esca esattamente 6 volte  
 377) esca esattamente 7 volte  
 378) esca esattamente 8 volte  
 379) esca al massimo 4 volte  
 380) esca almeno 6 volte  
 381) esca non più di 3 volte  
 382) esca meno di 6 volte  
 383) non esca meno di 6 volte  
 384) esca o 3 o 6 volte

385) Lancio una moneta 100 volte. Calcola la probabilità che testa esca al massimo 50 volte.

386) Lancio una moneta 100 volte. Calcola la probabilità che testa esca esattamente 50 volte.

### DADI



Lancio **un** dado. Calcola la probabilità che:

- 387) esca 5  
 388) esca 3  
 389) esca un numero pari  
 390) esca un numero primo  
 391) esca almeno 3  
 392) esca al massimo 5  
 393) esca meno di 5  
 394) esca più di 5  
 395) esca il 2 o il 4  
 396) esca un numero pari e primo

397) Lancio due dadi. La probabilità che esca 3 e 3 è la stessa di quella che esca 2 e 4? Spiega la tua risposta.

398) Lancio due dadi. Qual è la probabilità che la somma sia pari? Spiega la tua risposta.

399) Lancio tre dadi. Qual è la probabilità che la somma sia pari? Spiega la tua risposta.

Lancio **due** dadi. Calcola la probabilità che:

- 400) la somma sia 2  
 401) la somma sia 4  
 402) la somma sia 7  
 403) la somma sia dispari  
 404) la somma sia un numero primo  
 405) esca il 2 e il 4  
 406) esca il 2 o il 4  
 407) la somma sia almeno 8  
 408) la somma sia al massimo 5  
 409) la somma sia meno di 6  
 410) la somma sia più di 4  
 411) la somma sia divisibile per 4  
 412) la somma sia divisibile per 5  
 413) i due dadi abbiano due valori diversi

Lancio **tre** dadi. Calcola la probabilità che:

- 414) la somma sia 3  
 415) la somma sia 18  
 416) la somma sia 17  
 417) ci siano tre dadi con lo stesso valore  
 418) i dadi abbiano tutti valori diversi  
 419) ci siano esattamente due dadi con lo stesso valore  
 420) non ci sia nessun 6  
 421) in ogni dado il valore sia almeno 3  
 422) il ogni dado il valore sia al massimo 2  
 423) la somma sia al massimo 10 (ragionare!)

Lancio un dado **4 volte**. Calcola:

- 424) la probabilità che esca solo il 6  
 425) la probabilità che esca solo 1 volta il 6  
 426) la probabilità che esca solo 2 volte il 6  
 427) la probabilità che esca solo 3 volte il 6  
 428) la probabilità che esca almeno 3 volte il 6  
 429) la probabilità che non esca il 6  
 430) la probabilità che il 6 esca al massimo 3 volte  
 431) la probabilità che escano solo numeri pari

Calcola la probabilità che esca esattamente una volta il numero 1 se lancio:

- 432) 2 dadi  
 433) 3 dadi  
 434) 4 dadi  
 435)  $n$  dadi

Lancio un dado 10 volte.

- 436) Qual è la probabilità che non esca mai il 4?  
 437) Qual è la probabilità che esca sempre solo il 4?  
 438) Qual è la probabilità che il 4 esca una sola volta?

## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

- 439) Calcola la probabilità che escano 2 numeri diversi se lancio un dado 2 volte.  
440) Calcola la probabilità che escano 3 numeri diversi se lancio un dado 3 volte.  
441) Calcola la probabilità che escano 4 numeri diversi se lancio un dado 4 volte.  
442) Calcola la probabilità che escano 5 numeri diversi se lancio un dado 5 volte.  
443) Calcola la probabilità che escano 6 numeri diversi se lancio un dado 6 volte.  
444) Calcola la probabilità che escano 7 numeri diversi se lancio un dado 7 volte.

- 445) Facciamo un gioco. Lanciamo un dado finché non esce il 6. Quanti lanci faremo?  
Antonio afferma che il numero di lanci più probabile è 1.  
Barbara afferma che il numero di lanci più probabile è 2.  
Carlo afferma che il numero di lanci più probabile è 6.  
Chi ha ragione e perché?

- 446) Nel gioco del RISIKO immaginiamo che un giocatore attacca con un dado, e l'altro giocatore si difende con un dado. Queste sono le regole: i) i due giocatori tirano il dado ii) Chi ottiene un numero più grande vince iii) Se ottengono lo stesso numero vince la difesa. Qual è la probabilità che vinca l'attacco?

Un dado è truccato, la probabilità che esca 5 o 6 è il doppio della probabilità degli altri numeri.

- 447) Qual è la probabilità che esca 6?  
448) Qual è la probabilità che esca un numero maggiore di 3?  
449) Qual è la probabilità che tirando due dadi truccati la somma sia 12?

Ho due dadi. Un dado è truccato, cioè il 6 esce con probabilità 0,5 e gli altri numeri escono con probabilità tra loro uguali. Il secondo dado è normale. Lancio i due dadi. Calcola:

- 450) la probabilità che la somma sia 12;  
451) la probabilità che la somma sia 7;  
452) la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia un 6;  
453) Prendo uno dei due dadi e lo lancio. Esce 6. Qual è la probabilità di aver scelto il dado truccato?

- 454) Il professore decide il voto di uno studente con i dadi. Lancia il dado, se esce 6 lo lancia di nuovo, altrimenti scrive il voto del numero che esce. Qual è la probabilità per uno studente di prendere 5?  
455) Trova la probabilità dell'esercizio precedente se si usa un dado truccato in cui il 6 esce con probabilità 0,5 e gli altri numeri escono con probabilità tra loro uguali.

## URNE, PALLINE E BIGLIE

**Estrarre due palline insieme è come estrarre una pallina e poi l'altra senza rimettere la prima nell'urna.**

In un'urna ci sono 5 palline, 3 nere e 2 bianche. Ne estraggo due, senza rimettere la prima estratta nell'urna. Calcola la probabilità di:

- 456) estrarre due palline nere  
457) estrarre due palline di colore diverso  
460) estrarre una bianca, se la prima è bianca  
458) estrarre prima una nera e poi una bianca  
459) estrarre una bianca, se la prima è nera



In un'urna ci sono 5 palline, 3 nere e 2 bianche. Ne estraggo una, la rimetto nell'urna e ne estraggo un'altra. Calcola la probabilità di:

- 461) estrarre due palline nere  
462) estrarre due palline di colore diverso  
465) estrarre una bianca, se la prima è bianca  
463) estrarre prima una nera e poi una bianca  
464) estrarre una bianca, se la prima è nera

In un'urna ci sono 6 palline, 3 nere e 3 bianche. Ne estraggo due, senza rimettere la prima estratta nell'urna. Calcola la probabilità di:

- 466) estrarre due palline nere  
467) estrarre due palline di colore diverso  
468) estrarre prima una nera e poi una bianca  
469) estrarre una bianca, se la prima è nera

In un'urna ci sono 6 palline, 3 nere e 3 bianche. Ne estraggo una, la rimetto nell'urna e ne estraggo un'altra. Calcola la probabilità di:

- 470) estrarre due palline nere  
 471) estrarre due palline di colore diverso  
 472) estrarre prima una nera e poi una bianca  
 473) estrarre una bianca, se la prima è nera

In un'urna ci sono 9 palline bianche e 1 nera. Estraggo 2 palline insieme.

- 474) Qual è la probabilità di estrarre due palline bianche?  
 475) Qual è la probabilità di estrarre due palline di colore diverso?

In un'urna ci sono 5 palline bianche e 5 nere. Estraggo 2 palline insieme.

- 476) Qual è la probabilità di estrarre due palline bianche?  
 477) Qual è la probabilità di estrarre due palline di colore diverso?

In un'urna ci sono 1 pallina bianca e 9 nere. Estraggo 2 palline insieme.

- 478) Qual è la probabilità di estrarre due palline bianche?  
 479) Qual è la probabilità di estrarre due palline di colore diverso?

480) In un'urna ci sono 11 palline bianche e 35 nere. Quante palline bianche devo aggiungere affinché la probabilità di estrarre una pallina bianca sia  $\frac{6}{13}$ ?

481) Si hanno 2 urne, U1 con 3 palline rosse e 2 bianche, U2 con 2 palline rosse e 5 bianche. Si lancia una moneta: se viene testa si estrae dall'urna U1, se viene croce dall'urna U2. Calcola la probabilità di estrarre una pallina rossa.

482) Si hanno 2 urne, U1 con 5 palline rosse e 2 bianche, U2 con 2 palline rosse e 5 bianche. Si lancia una moneta: se viene testa si estrae dall'urna U1, se viene croce dall'urna U2. Calcola la probabilità di estrarre una pallina rossa.

483) Si hanno 2 urne, U1 con 1 pallina rossa, U2 con 2 palline rosse e 3 bianche. Si lancia una moneta: se viene testa si estrae dall'urna U1, se viene croce dall'urna U2. Calcola la probabilità di estrarre una pallina rossa.

In un'urna ci sono delle palline numerate da 1 a 60. Estraggo una pallina. Calcola la probabilità:

- 484) che esca un numero pari  
 485) che esca un numero divisibile per 6  
 486) che esca un numero divisibile per 7  
 487) che esca un numero dispari e minore di 40  
 488) che esca un numero dispari o minore di 40  
 489) che esca un numero dispari e divisibile per 7 e minore di 40  
 490) che esca un numero dispari e non divisibile per 7

Da un'urna contenente 20 palline bianche e 5 palline rosse viene estratta tre volte una pallina e viene rimessa nell'urna. Qual è la probabilità di estrarre:

- 491) 3 palline bianche  
 492) 3 palline rosse  
 493) 2 bianche e 1 rossa  
 494) 1 bianca e 2 rosse

Da un'urna contenente 20 palline bianche e 5 palline rosse viene estratta tre volte una pallina e non viene rimessa nell'urna. Qual è la probabilità di estrarre:

- 495) 3 palline bianche  
 496) 3 palline rosse  
 497) 2 bianche e 1 rossa  
 498) 1 bianca e 2 rosse

In una urna ci sono 15 palline numerate da 1 a 15. Vengono estratte due palline. Calcola:

- 499) La probabilità che la somma delle due palline sia pari  
 500) La probabilità che la somma delle due palline sia dispari  
 501) La probabilità che la differenza tra le due palline sia pari  
 502) La probabilità che la somma delle due palline sia 6

## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

- 503) La probabilità che la somma delle due palline sia un numero divisibile per 6
- 504) In una urna ci sono  palline rosse e 5 bianche. La probabilità che vengano estratte insieme due palline di colore diverso è  $\frac{11}{24}$ . Quante palline rimangono nell'urna?
- 505) Ho due biglie bianche e due nere, che dovrò mettere in due urne. Poi si sceglierà a caso un'urna e da essa si estrarrà una biglia: se sarà bianca, riceverò 1000Kč, altrimenti nulla. Come conviene mettere le biglie? Calcola la probabilità.

In un'urna ci sono 3 palline bianche, 3 rosse, 3 blu e 3 nere. Calcola la probabilità:

- 506) di estrarre insieme 2 palline dello stesso colore
- 507) di estrarre insieme 2 palline di colore diverso
- 508) di estrarre 2 palline dello stesso colore, se estraggo la prima e la rimetto nell'urna
- 509) di estrarre 2 palline di colore diverso, se estraggo la prima e la rimetto nell'urna
- 510) In un'urna ci sono 4 palline rosse e 6 gialle. Estraggo una pallina e non la rimetto nell'urna. Estraggo un'altra pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia gialla?
- 511) In un'urna ci sono 4 palline rosse e 6 gialle. Estraggo una pallina: se è rossa la rimetto nell'urna, se è gialla no. Estraggo un'altra pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia gialla?
- 512) In un'urna ci sono 4 palline rosse e 6 gialle. Estraggo una pallina: se è rossa metto nell'urna una pallina gialla, se è gialla metto nell'urna una pallina rossa. Estraggo un'altra pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia gialla?
- 513) In un'urna ci sono 4 palline rosse e 6 gialle. Estraggo una pallina e metto nell'urna una pallina rossa. Estraggo un'altra pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia gialla?

### QUIZ E TEST

- 514) Ad un esame ci sono 20 possibili domande, Daniel riesce a studiare solo 10 di queste domande. Qual è la probabilità di estrarre due domande a cui sa rispondere?



Ad un esame ci sono 30 possibili domande, Anna è molto pigra e studia solo 10 di queste domande.

- 515) Qual è la probabilità di estrarre due domande a cui non sa rispondere?
- 516) Qual è la probabilità di estrarre almeno una domanda su due a cui sa rispondere?

Ad un esame ci sono 10 possibili domande. Io ne estraggo 3 e devo sapere rispondere a tutte. Calcola la probabilità di passare l'esame se:

- 517) ho studiato solo 5 domande su 10
- 518) ho studiato 8 domande su 10
- 519) ho studiato 9 domande su 10
- 520) ho studiato 10 domande su 10

In un test ci sono 4 domande a risposta multipla con 4 possibili risposte, solo una è quella giusta:

- 521) in quanti modi diversi posso rispondere al test?
- 522) qual è la probabilità di rispondere bene a caso a tutte e quattro le domande?
- 523) qual è la probabilità di non indovinare nessuna risposta?
- 524) qual è la probabilità di indovinare una sola risposta?

In un test ci sono 6 domande a risposta multipla con 3 possibili risposte, solo una è quella giusta:

- 525) in quanti modi diversi posso rispondere al test?
- 526) qual è la probabilità di rispondere bene a caso a tutte e sei le domande?
- 527) qual è la probabilità di rispondere bene a caso esattamente a 5 di queste domande?
- 528) qual è la probabilità di rispondere bene a caso esattamente a 4 di queste domande?

- 529) In un test ci sono 10 domande a risposta multipla, per ogni domanda 3 possibili risposte. Per passare il test bisogna rispondere correttamente ad almeno 8 domande. Calcola la probabilità di passare il test, se si risponde a caso ad ogni domanda.

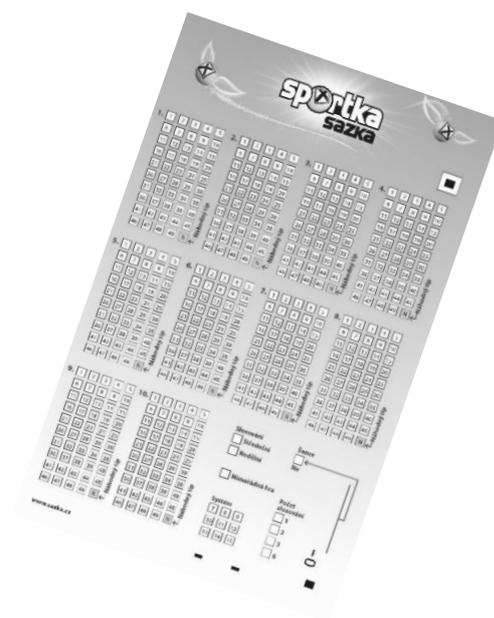
### LOTTO E SPORTKA

Nel lotto italiano vengono estratti 5 numeri da 1 a 90. Si vince se si indovino 2, 3, 4 oppure 5 di questi numeri. Scelgo 5 numeri. Calcola:

- 530) il numero totale di possibili cinquine (gruppi di 5 numeri)  
 531) la probabilità di indovinare 5 numeri  
 532) la probabilità di indovinare almeno 4 numeri  
 533) la probabilità di indovinare almeno 3 numeri  
 534) la probabilità di indovinare almeno 2 numeri

Nel gioco sportka si devono scegliere 6 numeri di 49. Calcola:

- 535) la probabilità di indovinare 6 numeri  
 536) la probabilità di indovinare almeno 5 numeri  
 537) la probabilità di indovinare almeno 4 numeri  
 538) la probabilità di indovinare almeno 3 numeri.  
 539) È più facile indovinare 5 numeri al lotto italiano o 6 numeri a sportka?



- 540) Ad un tavolo rotondo siamo seduti io, mio fratello e altre 2 persone. Se ci sediamo a caso, qual è la probabilità che io e mio fratello siamo seduti vicino?  
 541) Calcola l'esercizio se siamo io, mio fratello e altre 4 persone.  
 542) Calcola l'esercizio se siamo io, mio fratello e altre 6 persone.

Un tuo amico pensa ad un numero intero. Qual è teoricamente la probabilità:

- 543) che il numero sia pari  
 544) che il numero sia dispari  
 545) che il numero sia positivo  
 546) che il numero sia negativo  
 547) che il numero sia negativo pari  
 548) che sia un numero divisibile per 3  
 549) che sia un numero pari divisibile per 3  
 550) che sia un numero divisibile per 13  
 551) risolvi questo esercizio usando la definizione di probabilità. Cosa comprendi?

Un tuo amico pensa un numero qualsiasi (anche con la virgola o una frazione). Qual è la probabilità:

- 552) che sia un numero intero?  
 553) che sia un numero tra 0 e 1?

Per partecipare ad un gioco devo pagare 60Kc. Ecco il gioco:

In una delle scatole A, B, C ci sono 100Kc. Io scelgo una scatola. L'altro sa dove sono le 100Kc, e mi mostra una delle due scatole, quella senza soldi. Mi chiede se voglio cambiare scatola o mantenere la mia scelta.

- 554) Mi conviene cambiare scatola o mantenere la mia scelta?  
 555) Conviene giocare a questo gioco, cioè è più facile guadagnare dei soldi o perderli?  
 556) Tommaso ha questa regola. Va in metropolitana e prende il primo treno che passa. Se il treno va a nord va a bere una birra, se il treno va a sud va a scuola. I treni verso nord e verso sud passano con la stessa frequenza, uno ogni 5 minuti. Alla fine dell'anno vede che l'80% delle volte è andato a prendere una birra. Riesci a spiegare perché?

Immaginiamo che la probabilità di nascere maschi o femmine sia uguale. Una famiglia ha 3 figli. Calcola:

- 557) la probabilità che siano 3 figli maschi;  
 558) la probabilità che siano 3 figli maschi, sapendo che il primo è maschio  
 559) la probabilità che il terzo figlio sia femmina.

## CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ

Un arciero tira con l'arco. Di solito colpisce il bersaglio 8 volte su 10. Calcola la probabilità che su 3 tiri:

- 560) colpisca il bersaglio 3 volte;  
 561) colpisca il bersaglio almeno 2 volte;  
 562) non colpisca mai il bersaglio.

- 563) In un sacchetto ci sono tre foglietti con la lettera **M** e due foglietti con la lettera **A**. Calcola la probabilità di estrarre (senza rimettere dentro) cinque foglietti che nell'ordine formino la parola **MAMMA**.  
 564) Calcola l'esercizio nel caso in cui i foglietti vengano rimessi nel sacchetto ogni volta.

Antonella, Benedetta e Camilla si sfidano a corsa. Ecco la probabilità dei possibili ordini di arrivo:

1° posto	2° posto	3° posto	Probabilità
A	B	C	18%
A	C	B	9%
B	A	C	40%
B	C	A	20%
C	A	B	2%
C	B	A	11%

Calcola la probabilità che:

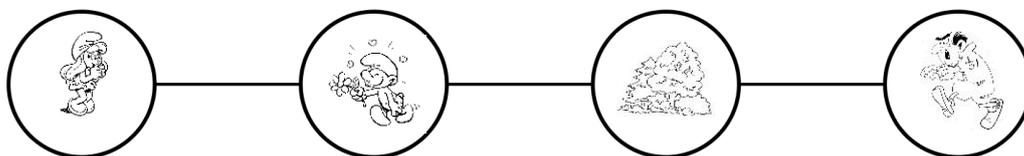
- 565) Benedetta vinca;  
 566) Benedetta arrivi seconda;  
 567) Camilla arrivi prima di Antonella;  
 568) Antonella non arrivi ultima;  
 569) vinca Camilla, se Antonella arriva terza.

Per la partita Juventus-Real Madrid queste sono le probabilità dei risultati:

0 – 0	12%	0 – 1	14%	0 – 2	8%
1 – 0	14%	1 – 1	16%	1 – 2	11%
2 – 0	8%	2 – 1	10%	2 – 2	7%

Calcola:

- 570) la probabilità che vinca il Real Madrid  
 571) la probabilità che la partita finisca in parità  
 572) la probabilità di avere almeno 2 gol  
 573) la probabilità che vinca la Juve e segni 2 gol  
 574) la probabilità che vinca la Juve, se segna 2 gol  
 575) la probabilità che vinca il Real e la Juve segni un gol  
 576) la probabilità che vinca il Real, se la Juve segna un gol  
 577) Nel disegno in basso il puffo innamorato vuole raggiungere puffetta, ma non conosce la strada. Tira una moneta, se esce croce va a sinistra, se esce testa va a destra. Se va nel bosco di nuovo tira la moneta e così via. Qual è la probabilità di raggiungere puffetta?



In un paese 9 persone su 15 sono more e le altre sono bionde. Fra i mori, 7 su 10 hanno occhi castani e gli altri occhi azzurri. Fra i biondi 4 su 5 hanno occhi azzurri e gli altri occhi castani. Calcola:

- 578) la probabilità che una persona abbia occhi azzurri;  
 579) fra quelli con occhi azzurri, la probabilità che una persona sia mora;  
 580) se la popolazione del paese è di 50.000 abitanti, il numero dei mori con occhi azzurri.

Un calciatore segna un rigore con probabilità 90%. Se tira 6 rigori, qual è la probabilità:

- 581) di segnare tutti i rigori?  
 582) di segnare esattamente 5 rigori?  
 583) di segnare esattamente 4 rigori?

Ogni giorno ho la probabilità 1% di arrivare in ritardo a scuola. Se ci sono 200 giorni di scuola, calcola:

- 584) la probabilità di non arrivare mai in ritardo
- 585) la probabilità di arrivare in ritardo una volta
- 586) la probabilità di arrivare in ritardo due volte
- 587) la probabilità di arrivare in ritardo almeno una volta

La LOGARITMITE colpisce il 10% degli studenti. Per diagnosticare questa malattia si fa un test. Chi è malato passa il test al 90%. Chi non è malato ha comunque il 10% di probabilità di passare il test.

- 588) Calcola la probabilità generale di passare il test.
- 589) Se uno studente ha passato il test, qual è la probabilità che sia malato?

In una città durante la giornata possiamo avere quattro diverse possibilità:

$$p(\text{mattina sole e pomeriggio sole}) = 0,4 \qquad p(\text{mattina sole e pomeriggio pioggia}) = 0,25$$

$$p(\text{mattina pioggia e pomeriggio sole}) = 0,2 \qquad p(\text{mattina pioggia e pomeriggio pioggia}) = 0,15$$

- 590) Calcola la probabilità che durante il giorno piova
- 591) Calcola la probabilità che non piova il pomeriggio
- 592) Calcola la probabilità che al mattino piova
- 593) Calcola la probabilità che al pomeriggio piova se al mattino c'è il sole

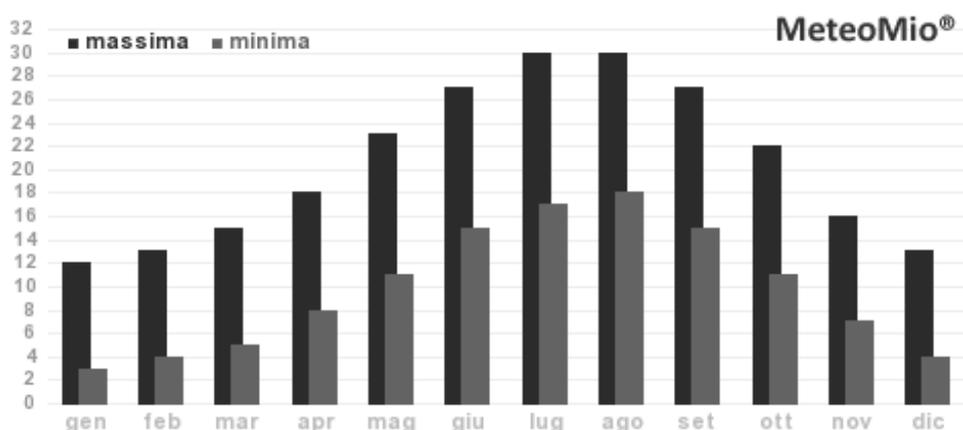
Una popolazione si compone per il 40% di fumatori e per il 60% di non fumatori. Il 25% di fumatori manifesta la malattia M, il 7% di non fumatori manifesta la malattia M.

- 594) Calcolare la probabilità che la malattia M sia presente nella popolazione.
- 595) Se uno ha la malattia M calcolare la probabilità che sia un fumatore.
- 596) Partecipo a due lotterie. Nella prima ho 18 biglietti e il totale dei biglietti è 42. Nella seconda ho 33 biglietti e il totale dei biglietti è 77. Dove ho più probabilità di vincere?
- 597) Su 4 biglietti sono scritti i numeri 0, 1, 2, 7. Qual è la probabilità di estrarre i biglietti, in modo da ottenere il numero 2017?
- 598) Gioco con il compagno a pari e dispari con le dita di una sola mano. Meglio puntare su pari o su dispari? Oppure è indifferente?
- 599) Calcola la probabilità che due persone compiano gli anni lo stesso giorno (non considerare il 29 febbraio).
- 600) Calcola la probabilità che in un gruppo di tre persone almeno due compiano gli anni lo stesso giorno.
- 601) Calcola la probabilità che in un gruppo di quattro persone almeno due compiano gli anni lo stesso giorno.
- 602) In una classe di 25 persone è più probabile che ci siano almeno due persone con la stessa data di compleanno. Trova il valore di questa probabilità.
- 603) Quante persone ci vogliono, perché la probabilità che almeno 2 compiano gli anni lo stesso giorno sia almeno 50%?

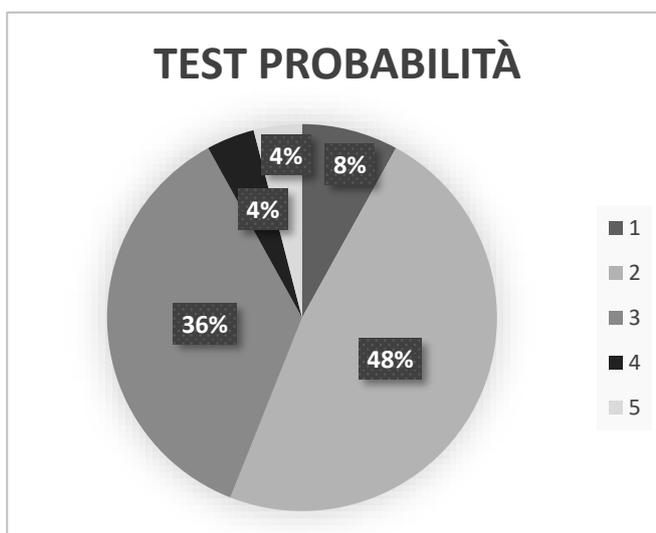
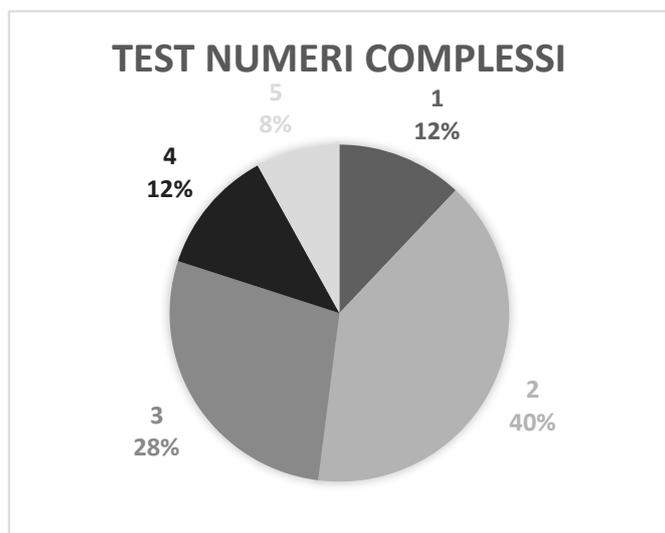
**ESERCIZI STATISTICA**

- 604) Stabilisci se, nei seguenti casi, l'indice centrale più significativo è la media, la moda, oppure altro:
- produrre scarpe di una sola misura;
  - valutare gli stipendi in Repubblica Ceca;
  - produrre un letto di dimensioni che vadano bene per tutti;
  - stabilire qual è il più bravo della classe.

- 605) Questa tabella mostra le temperature di Roma durante l'anno 2016. Calcola:
- con la temperatura massima: moda, mediana, media, la deviazione standard, il 2° e 3° quartile;
  - con la temperatura minima: moda, mediana, media, la deviazione standard, il 2° e 3° quartile;
  - la temperatura media: moda, mediana, media, la deviazione standard, il 2° e 3° quartile.



- 606) Questi sono i grafici a torta degli ultimi due test. Il numero degli studenti è 25. Trova:
- moda, mediana, media, la deviazione standard, il 2° e 3° quartile dei due test;
  - gli angoli delle fette di torta.



- 607) Rappresenta con un istogramma, calcola media, moda, mediana e  $\sigma$  di questa variabile statistica relativa a una popolazione maschile adulta e completala con la frequenza relativa:

peso	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110
frequenza	12	23	38	64	28	12	5
freq. relat.							



CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ, STATISTICA

**SOLUZIONI:**

- 1) 20 2) 72 3) 20 4) 24 5) Dopo 20 giorni 6) Dopo 168 giorni 7) 6 8) 6  
 9) 36 10) 27 11) 20 12) 16 13) 100 14) 90 15) 1 000 16) 720 17) 10 000 18) 5 040  
 19) 3 628 800 20) 24 21) 120 22) 720 23) 676 24) 17 576 25) 15 600 26) 308 915 776  
 27) 165 765 600 28) 3 089 157 760 29) 3 089 157 760 30) 21 624 104 320 31) 24 32) 190  
 33) 29 34) 171 35) 45 36) 361 37) 235 38) 18 900 39) 10 000 40) 11 110 41) 625  
 42) 625 43) 26 000 000 44) 456 976 000 45) A1 B5 C14 D30 E55 F91 G140 46) A1 B9 C36 D100  
 E225 F441 G784 47) 385 48) 3 025 49) 6 50) 70 51) 4 52) 15 53) 64 54) 325 56) 2  
 57) 6 58) 24 59)  $\infty$  60) 24 61) 45 62) 171 63) 190 64) 406 65) 120 66) 3 654  
 67) 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 68) 60 69) 36 70) 12 71) 24 72) 18 73) 54 74) 28 75) 6 in più 76) 120  
 77) 48 pari e 72 dispari 78) 120 79) 24 80) 48 81) 0 82) 24 83) 0 84) 144 85) 72 86) 5 040  
 87) 144 88) 720 89) 2 520 90) 288 91) 144 92) 4 93) 1 94) 32 95) 16 96) 108  
 triangoli, 81 quadrati 97) 256 triangoli, 256 quadrati 98) 500 triangoli, 625 quadrati 99) 120 100) 938 043 756 000  
 101) 7 817 031 300 102) 3 103) 6 104) 10 105) 45 106)  $\frac{n(n-1)}{2}$  107) 4 108) 20  
 109)  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  110) 252 111) 120 112) 60 113) 30 114) 10 115) 60  
 116) 630 117) 7 560 118) 45 119) 455 120) 4 845 121) 6 122) 15 123) 21  
 124) 15 125) 6 126) 1 127) 15 128) 15 129) 15 130) 56 131) 252 132) 126  
 133) 6 134) 10 135) 15 136) 35 137) 2 138) 3 139) 4 140) 6 141) 10 142) 15 143) 126  
 145) 31 008 146) 22 100 147) 18 304 148) 52 149) 3 796 150) 3 744 151) 1144  
 152) 8 788 153) 12 168 154) 6 864 155) 768 156) 4 804 157) 20 825 158) 2 598 960  
 159) 1 712 304 160) 886 656 161) 5 148 162) 576 163) 40 164) 3 744 165) 1 024 166) 10  
 167) 45 168) 120 169) 252 170) 252 171) 45 172) 638 173) 56 174) 56  
 175) 968 176) 19 683 177) 1 178) 512 179) 5 376 180) 5 376 181) 19 182) 144  
 183) 163 184) 3 185) 2 186) 4 187) 5 188) 4 189) 36 190) 18 191) 6 192) 2 193) 15  
 194) 21 195) 15 196) 21 197) 15 198) 216 199) 0 200) 1 201) 3 202) 1 203) 3  
 204) 6 205) 108 206) 20 207) 60 208) 24 209) 24 210) 12 211) 5 212) 12  
 213) 24 214) 6 215) 125 216) 50 217) 25 218) 25 219) 64 220) 27  
 221) 9 000 222) 4 536 223) 715 224) 210 225) 495 226) 126 227) 4 228) 10  
 229) 20 230) 35 231) 126 232) 252 233) 8 874 234) 35 960 235) 15 236) 28  
 237) 10 238) 7 239) 256 240) 8 241) 28 242) 70 243) 219 244) 163 245) 35  
 246) 14 247) 45 248) 21 249) 66 250) 15 251) 479 001 600 252) 103 680  
 253) 56 254) 3 432 255) 840 256) 20 257) 175 760 258) 10 259) 35 260) 165  
 261) 56 262) 45 263) 300 264) 53 130 265) 53 130 266) 21 000 267) 47 054 700  
 268) 243 101 250 269) 3 270) 6 271) 10 272) 45 273) 11 274) 29  
 275) 70 276) 9 277) 26 278) 16 279) 32 280) 0 281) 100 030 002 282)  $-32i$   
 283)  $x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$  284) 1 001 000 285)  $n(n-1)$  286)  $n(n+1)$   
 287)  $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$  288) 56 289)  $n-1$  290) 120 291) 20 292) 2 450  
 293) 9 999 900 000 294)  $\frac{1}{1\,000\,000}$  295) 600 296) 870 297) 252 298) 455 299) 5 050  
 300) 50 005 000 301)  $\frac{1}{380}$  302) 7 303) 4 304) 0 305) 24 306) 7 307) 3 308) 3 e 4 309)  $-1$   
 310) 4 311) 7 312) 12 313) 154 314)  $\frac{18}{37}$  315)  $\frac{18}{37}$  316)  $\frac{1}{37}$  317)  $\frac{10}{37}$  318)  $\frac{26}{37}$

- 319)  $\frac{18}{37}$  320)  $\frac{36}{37}$  321)  $\frac{1}{4}$  322)  $\frac{1}{13}$  323)  $\frac{1}{52}$  324)  $\frac{4}{13}$  325)  $\frac{12}{13}$  326)  $\frac{1}{13}$
- 327)  $\frac{1}{221}$  328)  $\frac{33}{221}$  329)  $\frac{91}{221}$  330)  $\frac{4}{17}$  331)  $\frac{13}{17}$  332)  $\frac{1}{17}$  333)  $\frac{1}{425}$  334)  $\frac{352}{425}$
- 335)  $\frac{72}{425}$  336)  $\frac{73}{425}$  337)  $\frac{22}{425}$  338)  $\frac{169}{425}$  339)  $\frac{4\ 324}{5\ 525}$  340)  $\frac{1\ 201}{5\ 525}$  341)  $\frac{1}{54\ 145}$
- 342)  $\frac{1}{4\ 165}$  343)  $\frac{1}{64\ 974}$  344)  $\frac{1}{4}$  345)  $\frac{1}{4}$  346)  $\frac{1}{4}$  347)  $\frac{3}{4}$  348)  $\frac{1}{16}$  349)  $\frac{1}{16}$  350)  $\frac{1}{4}$  351)  $\frac{11}{16}$
- 352)  $\frac{1}{4}$  353)  $\frac{1}{32}$  354)  $\frac{1}{1\ 024}$  355) quasi 0 356)  $\frac{1}{32}$  357)  $\frac{5}{32}$  358)  $\frac{5}{16}$  359)  $\frac{5}{16}$
- 360)  $\frac{13}{16}$  361)  $\frac{1}{2}$  362)  $\frac{1}{32}$  363)  $\frac{1}{2}$  364)  $\frac{5}{16}$  365)  $\frac{15}{64}$  366)  $\frac{11}{32}$  367)  $\frac{57}{64}$  368)  $\frac{21}{32}$
- 369)  $\frac{7}{64}$  370)  $\frac{1}{256}$  371)  $\frac{1}{32}$  372)  $\frac{7}{64}$  373)  $\frac{7}{32}$  374)  $\frac{35}{128}$  375)  $\frac{7}{32}$  376)  $\frac{7}{64}$
- 377)  $\frac{1}{32}$  378)  $\frac{1}{256}$  379)  $\frac{163}{256}$  380)  $\frac{37}{256}$  381)  $\frac{93}{256}$  382)  $\frac{219}{256}$  383)  $\frac{37}{256}$  384)  $\frac{21}{64}$
- 385)  $\frac{1}{2}$  386) 7,96% 387)  $\frac{1}{6}$  388)  $\frac{1}{6}$  389)  $\frac{1}{2}$  390)  $\frac{1}{2}$  391)  $\frac{2}{3}$  392)  $\frac{5}{6}$  393)  $\frac{2}{3}$  394)  $\frac{1}{6}$  395)  $\frac{1}{3}$  396)  $\frac{1}{6}$  398)  $\frac{1}{2}$  399)  $\frac{1}{2}$
- 400)  $\frac{1}{36}$  401)  $\frac{1}{12}$  402)  $\frac{1}{6}$  403)  $\frac{1}{2}$  404)  $\frac{5}{12}$  405)  $\frac{1}{18}$  406)  $\frac{5}{9}$  407)  $\frac{5}{12}$  408)  $\frac{5}{18}$
- 409)  $\frac{5}{18}$  410)  $\frac{5}{6}$  411)  $\frac{1}{4}$  412)  $\frac{7}{36}$  413)  $\frac{5}{6}$  414)  $\frac{1}{216}$  415)  $\frac{1}{216}$  416)  $\frac{1}{72}$  417)  $\frac{1}{36}$
- 418)  $\frac{5}{9}$  419)  $\frac{5}{12}$  420)  $\frac{125}{216}$  421)  $\frac{8}{27}$  422)  $\frac{1}{27}$  423)  $\frac{1}{2}$  424)  $\frac{1}{1\ 296}$  425)  $\frac{125}{324}$  426)  $\frac{25}{216}$
- 427)  $\frac{5}{324}$  428)  $\frac{7}{432}$  429)  $\frac{625}{1\ 296}$  430)  $\frac{1\ 295}{1\ 296}$  431)  $\frac{1}{16}$  432)  $\frac{5}{18}$  433)  $\frac{25}{72}$  434)  $\frac{125}{324}$
- 435)  $\frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n}$  436) 16,15% 437) circa  $\frac{1}{60\ 000\ 000}$  438) 32,3% 439)  $\frac{5}{6}$  440)  $\frac{5}{9}$  441)  $\frac{5}{18}$  442)  $\frac{5}{54}$
- 443)  $\frac{5}{324}$  444) 0 445) Antonio 446)  $\frac{5}{12}$  447)  $\frac{1}{4}$  448)  $\frac{5}{8}$  449)  $\frac{1}{16}$  450)  $\frac{1}{12}$  451)  $\frac{1}{6}$  452)  $\frac{7}{12}$
- 453)  $\frac{3}{4}$  454)  $\frac{1}{5}$  455)  $\frac{1}{5}$  456)  $\frac{3}{10}$  457)  $\frac{3}{5}$  458)  $\frac{3}{10}$  459)  $\frac{1}{2}$  460)  $\frac{1}{4}$  461)  $\frac{9}{25}$  462)  $\frac{12}{25}$  463)  $\frac{6}{25}$
- 464)  $\frac{2}{5}$  465)  $\frac{2}{5}$  466)  $\frac{1}{5}$  467)  $\frac{3}{5}$  468)  $\frac{3}{10}$  469)  $\frac{3}{5}$  470)  $\frac{1}{4}$  471)  $\frac{1}{2}$  472)  $\frac{1}{4}$  473)  $\frac{1}{2}$  474)  $\frac{4}{5}$  475)  $\frac{1}{5}$  476)  $\frac{2}{9}$  477)  $\frac{5}{9}$
- 478) 0 479)  $\frac{1}{5}$  480) 19 481)  $\frac{31}{70}$  482)  $\frac{1}{2}$  483)  $\frac{7}{10}$  484)  $\frac{1}{2}$  485)  $\frac{1}{6}$  486)  $\frac{2}{15}$  487)  $\frac{1}{3}$  488)  $\frac{49}{60}$
- 489)  $\frac{1}{20}$  490)  $\frac{13}{30}$  491)  $\frac{64}{125}$  492)  $\frac{1}{125}$  493)  $\frac{48}{125}$  494)  $\frac{12}{125}$  495)  $\frac{57}{115}$  496)  $\frac{1}{230}$
- 497)  $\frac{19}{46}$  498)  $\frac{2}{23}$  499)  $\frac{7}{15}$  500)  $\frac{8}{15}$  501)  $\frac{7}{15}$  502)  $\frac{2}{105}$  503)  $\frac{4}{35}$  504) 14
- 505) 1B in un'urna, le altre nell'altra. La probabilità è  $\frac{5}{6}$  506)  $\frac{2}{11}$  507)  $\frac{9}{11}$  508)  $\frac{1}{4}$  509)  $\frac{3}{4}$  510) 60%
- 511) 57% 512) 58% 513) 54% 514)  $\frac{9}{38}$  515)  $\frac{38}{87}$  516)  $\frac{49}{87}$  517)  $\frac{1}{12}$  518)  $\frac{7}{15}$
- 519)  $\frac{7}{10}$  520) 1 521) 256 522)  $\frac{1}{256}$  523)  $\frac{81}{256}$  524)  $\frac{27}{64}$  525) 729 526)  $\frac{1}{729}$  527)  $\frac{4}{243}$
- 528)  $\frac{20}{243}$  529) 0,34% 530) 43 949 268 531)  $\frac{1}{43\ 949\ 268}$  532)  $\frac{1}{511\ 038}$  533)  $\frac{1}{11\ 748}$  534)  $\frac{2}{801}$
- 535)  $\frac{1}{13\ 983\ 816}$  536)  $\frac{1}{317\ 814}$  537)  $\frac{15}{211\ 876}$  538)  $\frac{5}{4\ 606}$  539) sportka 540)  $\frac{2}{3}$  541)  $\frac{2}{5}$  542)  $\frac{2}{7}$  543)  $\frac{1}{2}$  544)  $\frac{1}{2}$
- 545)  $\frac{1}{2}$  546)  $\frac{1}{2}$  547)  $\frac{1}{4}$  548)  $\frac{1}{3}$  549)  $\frac{1}{6}$  550)  $\frac{1}{13}$  552) 0 553) 0 557)  $\frac{1}{8}$  558)  $\frac{1}{4}$  559)  $\frac{1}{2}$  560)  $\frac{64}{125}$  561)  $\frac{112}{125}$
- 562)  $\frac{1}{125}$  563) 10% 564) 3,46% 565) 27% 566) 29% 567) 33% 568) 69% 569)  $\frac{11}{31}$
- 570) 33% 571) 35% 572) 60% 573) 18% 574)  $\frac{18}{25}$  575) 11% 576)  $\frac{1}{6}$  577)  $\frac{2}{3}$  578)  $\frac{1}{2}$
- 579)  $\frac{16}{25}$  580) 16 000 581) 53% 582) 35,4% 583) 9,84% 584) 13,4% 585) 27%
- 586) 27,2% 587) 86,6% 588) 18% 589) 50% 590) 60% 591) 60% 592) 35% 593) 38%
- 594) 14,2% 595) 70,4% 596) è uguale 597)  $\frac{1}{24}$  598) se vale anche 0 è indifferente, altrimenti è meglio pari
- 599) 1 su 365 600) 0,82% 601) 1,6% 602) 56,87% 603) 23

## STÁTNÍ MATURITA Z MATEMATIKY

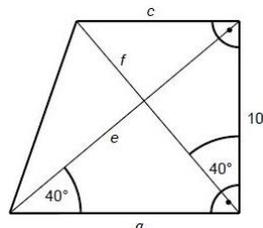
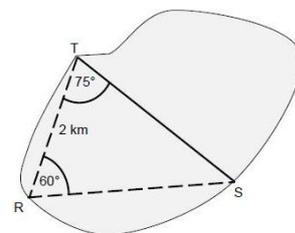
## Exponenciální a logaritmické rovnice / nerovnice:

- 1) V oboru  $R$  řešte:  $\log 0,1 + \log(2x) = 1$  (2011, 2 body)
- 2) Je dána rovnice s neznámou  $x \in R$ :  $\log x^2 - 2 \log x = 0$ . Řešením rovnice je: (2012, 2 body)  
 A)  $\emptyset$       B)  $\{0\}$       C)  $\{0,1; 10\}$       D)  $(0; +\infty)$       E)  $R \setminus \{0\}$
- 3) V oboru  $R$  řešte:  $5^{x+4} = \frac{25}{5^x}$  (2013, 2 body)
- 4) Ke každé rovnici (1-4) řešené v oboru  $R$  přiřaďte interval (A-E), v němž se nachází řešení dané rovnice, nebo prázdnou množinu (F), nemá-li rovnice řešení. (2018, 4 body)
- 1)  $3^{2x} = 9^{-x}$       2)  $2^{2x} \cdot 2^{-x} = \frac{1}{2}$       3)  $\log(x-2) = \log(1-x)$       4)  $2 \cdot \log x = 1$
- A)  $(-\infty; -1)$       B)  $(-1; 1)$       C)  $(1; 2)$       D)  $(2; 3)$       E)  $(3; +\infty)$       F)  $\emptyset$
- 5) V oboru  $R$  řešte rovnici:  $\frac{25^x}{5} = 5 \cdot 5^{x-2}$  (2019, 1 bod)
- 6) V oboru  $R$  řešte:  $2^{1000} \div 2^{500} + 3 \cdot 2^{500} = 2^x$  (2020, 1 bod)

## Goniometrie a trigonometrie:

- 7) Pozemek zakreslený v plánu má být rozdělen rovnou hranicí  $ST$  na dvě části. Určete s přesností na desítky metrů délku hranice  $ST$ : (2011, 2 body)

- A)  $|ST| = 2\,230$  m      B)  $|ST| = 2\,450$  m      C)  $|ST| = 2\,630$  m  
 D)  $|ST| = 2\,800$  m      E)  $|ST| = 3\,010$  m



- 8) V pravoúhlém lichoběžníku jsou uvedeny úhly, které svírají úhlopříčky se dvěma sousedními stranami, a délka jedné strany.

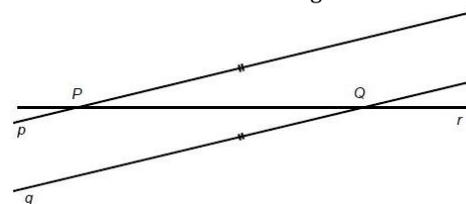
Přiřaďte daným úsečkám (1-3) jejich délky (A-E): (2011, 3 body)

- 1) strana  $a$  \_\_\_\_\_      2) strana  $c$  \_\_\_\_\_      3) úhlopříčka  $f$  \_\_\_\_\_  
 A)  $10 \cdot \sin 40^\circ$       B)  $\frac{10}{\sin 40^\circ}$       C)  $\frac{10}{\cos 40^\circ}$       D)  $10 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$       E)  $\frac{10}{\operatorname{tg} 40^\circ}$

- 9) Rovnoběžné přímky  $p, q$  protínají přímku  $r$  v bodech  $P, Q$ . Vzdálenost rovnoběžek je 5, odchylka přímek  $p, r$  je  $30^\circ$ .

Určete vzdálenost bodu  $P$  od přímky  $q$ .

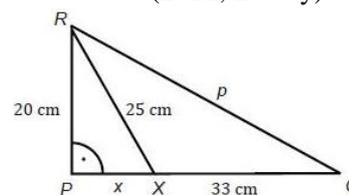
Vypočítejte vzdálenost bodů  $P, Q$ . (2012, 3 body)



- 10) Trojúhelník  $ABC$  je určen délkami stran  $a = 9$  cm,  $b = 15$  cm,  $c = 10$  cm. Jakou hodnotu (s přesností na setiny) má kosinus největšího vnitřního úhlu? (2012, 2 body)

- A) +0,49      B) +0,12      C) -0,24      D) -0,49      E) -0,76

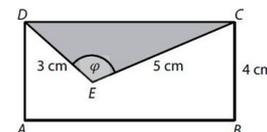
- 11) V pravoúhlém trojúhelníku  $PQR$  je odvěsna  $PQ$  rozdělena bodem  $X$  na dva úseky, z nichž delší má délku 33 cm. Druhá odvěsna  $PR$  měří 20 cm a délka přímky  $RX$  je 25 cm. Vypočítejte délku  $p$  strany  $QR$ . (2013, 2 body)



- 12) V trojúhelníku  $ABC$  leží proti stranám  $a, b, c$  úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ . Rozhodněte o každé následující trojici veličin, zda popisuje pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $c$  či nikoli. (2013, 2 body)

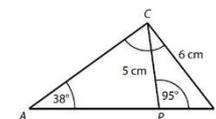
- A)  $b = 1, c = 2, \alpha = 60^\circ$       B)  $a = 1, b = \sqrt{3}, \alpha = 60^\circ$       C)  $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{6}, \alpha = 30^\circ$

- 13) V obdélníku  $ABCD$  o obsahu  $28 \text{ cm}^2$  je umístěn trojúhelník  $CDE$ . Oba obrazce mají společnou stranu  $CD$ . Platí  $|BC| = 4 \text{ cm}$ ,  $|CE| = 5 \text{ cm}$ ,  $|DE| = 3 \text{ cm}$ . Vypočtete velikosti úhlu  $\varphi$ . (2018, 2 body)



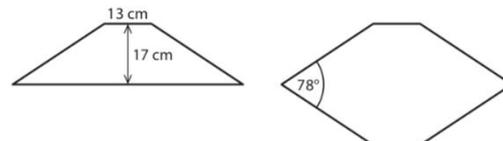
- 14) Pro dva různé úhly  $\alpha = 112^\circ$ ,  $\beta \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$  platí  $\cos \alpha = \cos \beta$ . Určete ve stupních velikost úhlu  $\beta$  (2019, 1 bod)

- 15) V trojúhelníku  $ABC$  platí:  $|BC| = 6 \text{ cm}$ ,  $|CP| = 5 \text{ cm}$ ,  $|\sphericalangle BAC| = 38^\circ$ ,  $|\sphericalangle BPC| = 95^\circ$ ,  $P \in AB$ . Jaká je velikost vnitřního úhlu  $ACB$  v daném trojúhelníku? Výsledek je zaokrouhlen na celé stupně. (2019, 2 body)



- A)  $83^\circ$       B)  $86^\circ$       C)  $90^\circ$       D)  $102^\circ$       E) větší než  $103^\circ$

- 16) Konvexní šestiúhelník se skládá ze dvou shodných rovnoramenných lichoběžníků s výškou  $17 \text{ cm}$  a kratší základnou délky  $13 \text{ cm}$ . Právě dva vnitřní úhly v šestiúhelníku mají velikost  $78^\circ$ .

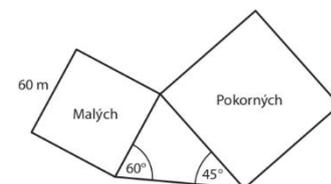


Vypočtete v cm délku delší základny lichoběžníku a zaokrouhlete ji na celé cm.

Vypočtete v cm obvod šestiúhelníku a zaokrouhlete ji na celé cm.

(2020, 2 body)

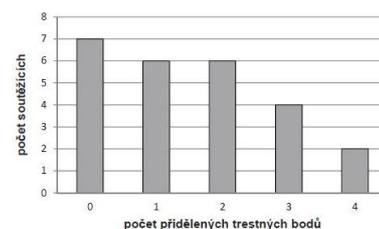
- 17) Na trojúhelníkový pozemek navazují čtvercové pozemky Malých a Pokorných. O kolik  $\text{m}^2$  je výměra pozemku Malých menší než výměra pozemku Pokorných? (2020, 2 body)



- A) o  $1\,200 \text{ m}^2$     B) o  $1\,400 \text{ m}^2$     C) o  $1\,800 \text{ m}^2$     D) o  $2\,100 \text{ m}^2$     E) o  $2\,700 \text{ m}^2$

**Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika:**

- 18) Určete neznámé číslo  $k$ , jestliže platí:  $100! = k \cdot 98!$  (2011, 1 bod)
- 19) Určete neznámé číslo  $m$ , jestliže platí:  $m! \cdot 2^8 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16$  (2011, 1 bod)
- 20) Cesta prochází několika křižovatkami. Na každé křižovatce je možné zahnout doleva (L), doprava (P), nebo pokračovat v přímém směru (S). Průjezd dvěma křižovatkami je možné zapsat dvojicí znaků, např. PP, SL apod. Kolika způsoby může auto projet dvěma křižovatkami? (2011, 2 body)
- A) 9      B) 8      C) 6      D) 5      E) 4
- 21) Z pečlivě promíchaného balíku 52 karet bylo odebráno sedm karet. Mezi zbývajících kartami v balíku zůstává devět srdcových karet. Jaká je pravděpodobnost, že v dalším tahu z balíku nebude vytažena srdcová karta? (2012, 2 body)
- 22) Průměrný plat ve skupině deseti pracovníků byl  $26\,800 \text{ Kč}$ . Čtyřem pracovníkům zvýšili plat o stejnou částku, proto se průměrný plat desetičlenné skupiny zvedl o  $240 \text{ Kč}$ . O kolik korun si polepšil každý z platově zvýhodněných pracovníků? (2012, 2 body)
- A) o  $240 \text{ Kč}$     B) o  $400 \text{ Kč}$     C) o  $480 \text{ Kč}$     D) o  $960 \text{ Kč}$     E) o jinou částku
- 23) V soutěži na dopravním hřišti mohl každý soutěžící získat celkem 0-4 trestné body. Výsledky soutěže udává následující graf. (2013, 2 body)
- Určete medián počtu trestných bodů přidělených jednotlivým soutěžícím.
- Určete průměrný počet trestných bodů přidělených jednotlivým soutěžícím.



- 24) Pětimístný kód obsahuje pět různých číslic, na prvním místě je číslice 8 a na posledním místě číslice 5. (Zadání vyhovuje např. kód 80415). Kolik různých kódů vyhovuje popisu? (2013, 2 body)
- A) méně než 336      B) 336      C) 512      D) 720      E) více než 720

- 25) Na semináři je 25 žáků. Pouze 10 z nich je dobře připraveno. Učitel vylosuje 5 žáků ke zkoušení. Jaká je pravděpodobnost, že první vylosovaný žák je dobře připraven? (2013, 2 body)
- A) 0,05      B) 0,2      C) 0,4      D) 0,5      E) větší než 0,5

- 26) Soutěž má dvě kola. Body z obou kol se sčítají. Soutěžící byli na počátku soutěže rozděleni do dvou skupin. V těchto skupinách absolvovali první i druhé kolo soutěže. Průměrné výsledky jsou uvedeny v tabulce.

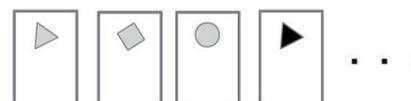
	Počet soutěžících	Průměrný bodový zisk na osobu		
		První kolo	Druhé kolo	Celá soutěž
Skupina A	20	3,0	4,4	
Skupina B	30	4,0	4,4	
Všichni	50			

- a) Vypočítejte průměrný bodový zisk na osobu v prvním kole soutěže (počítejte se všemi 50 soutěžícími)
- b) Vypočítejte průměrný bodový zisk na osobu v celé soutěži (počítejte se všemi 50 soutěžícími) (2018, 2 body)
- 27) Tajný kód splňuje následující 3 pravidla:      - kód může obsahovat pouze číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6  
 - žádné číslice se v kódu neopakují      - počet číslic v kódu udává první číslice kódu (uvedeným pravidlům vyhovují kódy 21, 326, 4325 a další.) (2018, 2 body)

Uveďte počet všech kódů, které mají na prvním místě číslici 3

Uveďte počet všech kódů, které mají na prvním místě číslici 4, 5 nebo 6.

- 28) Každá z 9 různých karet obsahuje jeden ze tří obrazců (trojúhelník, čtverec, kruh) v jedné ze tří barev (šedá, černá, modrá). Karty zamícháme a náhodně odebereme 2 karty. Jaká je pravděpodobnost, že žádná z obou odebraných karet nebude obsahovat ani trojúhelník, ani obrazec černé barvy? (2018, 2 body)



- A)  $\frac{1}{6}$       B)  $\frac{2}{9}$       C)  $\frac{1}{3}$       D)  $\frac{4}{9}$       E) jiná pravděpodobnost

- 29) Trojmístný kód obsahuje vždy písmeno A a dvě různé číslice z deseti možných (0-9). Vyhovují např. kódy A36, 0A1, 69A. Určete počet všech možných kódů vyhovujících zadání (2019, 1 bod)

- 30) V rodině Novotných mají 4 děti, a to 2 dívky a 2 chlapce. V rodině Dlouhých mají také 4 děti, ale jen 1 dívku a 3 chlapce. Z uvedených osmi dětí se vylosuje dvojice dětí. Přiřaďte ke každému z následujících jevů (1-4) pravděpodobnost (A-F), s kterou může daný jev nastat. (2019, 4 body)

1) Ve vylosované dvojici budou dvě dívky \_\_\_\_\_      2) Ve vylosované dvojici budou dva chlapci \_\_\_\_\_

3) Ve vylosované dvojici budou oba chlapci Novotných \_\_\_\_\_

4) Ve vylosované dvojici bude 1 chlapec Novotných a 1 dívka Dlouhých \_\_\_\_\_

- A)  $\frac{1}{28}$       B)  $\frac{1}{14}$       C)  $\frac{3}{28}$       D)  $\frac{1}{7}$       E)  $\frac{3}{14}$       F)  $\frac{5}{14}$

- 31) Na světelné liště je vedle sebe umístěno 5 žárovek různých barev (Č, M, Z, Ž, F).



Signál se vydává bliknutím 2 žárovek současně, např. ZF. Heslo je tvořeno třemi signály jdoucími po sobě v takovém pořadí, aby dva signály sledující bezprostředně po sobě nebyly stejné. Jedno heslo může být sestaveno např. ze signálů ZF, ČŽ, ZF.



Vypočítejte, kolik existuje různých signálů, kolik různých hesel lze vytvořit.

(2020, 2 body)

- 32) Všech 110 žáků čtvrtého ročníku dostalo známku ze závěrečného testu. Tabulka udává rozdělení četností známek. Určete medián známek ze závěrečného testu.

Známka	1	2	3	4	5
Četnost	30	27	27	26	0

(2020, 1 bod)

## SOMMARIO

INTRODUZIONE.....	3
FUNZIONI $y = f(x)$ .....	4
POTENZE.....	5
RADICI.....	5
LOGARITMI.....	6
FUNZIONE ESPONENZIALE $y = a^x \quad a > 0$ .....	7
FUNZIONE LOGARITMICA $y = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$ .....	7
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI.....	8
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE.....	9
CIRCONFERENZA GONIOMETRICA – TEORIA.....	10
CIRCONFERENZA GONIOMETRICA – ESEMPI.....	11
FUNZIONE $y = \sin x$ .....	12
FUNZIONE $y = \cos x$ .....	12
FUNZIONE $y = \tan x$ .....	12
EQUAZIONI GONIOMETRICHE.....	13
FORMULE UTILI SUGLI ANGOLI.....	14
ESERCIZI BASE DI TRIGONOMETRIA.....	15
COORDINATE CARTESIANI E POLARI.....	16
NUMERI IMMAGINARI.....	17
NUMERI COMPLESSI.....	17
FORMA ALGEBRICA E FORMA TRIGONOMETRICA.....	18
REGOLE PRATICHE CON I NUMERI COMPLESSI.....	19
CALCOLO COMBINATORIO.....	20
TRIANGOLO DI PASCAL.....	21
PROBABILITÀ – GENERALE.....	22
PROBABILITÀ CONDIZIONATA.....	22
PROBABILITÀ - ESEMPI.....	23
STATISTICA.....	26
ESERCIZI SU ESPONENZIALI E LOGARITMI.....	27
ESPONENZIALI E LOGARITMI – Maturità italiana:.....	39
ESERCIZI DI GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA:.....	40
TRIGONOMETRIA E ASTRONOMIA.....	50
GONIOMETRIA – Maturità italiana.....	51
TRIGONOMETRIA – Maturità italiana.....	52
ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI.....	53
NUMERI COMPLESSI – Maturità italiana.....	59
ESERCIZI CALCOLO COMBINATORIO.....	60
ESERCIZI PROBABILITÀ.....	69
ESERCIZI STATISTICA.....	77
CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ, STATISTICA – Maturità italiana.....	78
STÁTNÍ Maturita z matematiky.....	81