

Dispensa di Matematica per la classe 6. C

**FUNZIONI E
INTEGRALI
RIPASSO**

Nome e Cognome:

PREPARAZIONE ALLA MATURITÀ

Il programma di matematica degli **ultimi tre anni** lentamente prepara gli studenti all'esame di **maturità**.

L'esame di maturità è formato da **due parti**.

La prima parte vale **60 punti**, solo lo studio di funzione vale 30-35 punti.

La seconda parte vale **40 punti**, sono 8 domande, lo studente ne sceglie 4, ogni domanda vale 10 punti.

Gli argomenti delle domande sono 21:

IV ANNO	1. Equazioni o disequazioni esponenziali
	2. Equazioni o disequazioni logaritmiche
	3. Trigonometria (teorema dei seni o del coseno)
	4. Equazioni o disequazioni goniometriche
	5. Calcolo combinatorio (ed equazioni con $n!$)
	6. Probabilità
	7. Statistica
	8. Numeri complessi
V ANNO	9. Punti, vettori e rette in 2D
	10. Punti, vettori, rette e piani in 3D
	11. Coniche (circonferenza, ellissi, iperbole, parabola)
	12. Successioni e serie
	13. Limiti
	14. Rette tangenti
	15. Derivate
	16. Simmetrie delle funzioni
VI ANNO	17. Funzioni ed equazioni parametriche
	18. Integrali
	19. Rotazione delle funzioni nello spazio
	20. Massimi e minimi in geometria
	21. Disequazioni (ripasso)

Per superare l'esame di maturità sono necessari **35 punti su 100**.

I temi d'esame vengono preparati dal professore e inviati a Roma, ma possono essere accettati o anche cambiati.

FUNZIONI CON LA RADICE QUADRATA

- 1) **Dominio:** dove la parte dentro la radice ≥ 0
- 2) **Simmetrie:** vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)
- 3) **Intersezioni** con gli assi

se $x = 0$ allora $y = \dots$ se $y = 0$ allora $x = \dots$

- 4) **Segno** della funzione La radice è sempre positiva (nel dominio)

- 5) **Limiti:** dipendono dal dominio

Ad esempio dominio $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$ calcola $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 6) **ASINTOTI:**

VERTICALI: di solito dove la parte sotto la frazione = 0

ORIZZONTALE: se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ asintoto orizzontale $y = k$

OBLIQUO: se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ forse può esserci un asintoto obliquo

Si trova $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$

k, q devono essere $\neq \infty$

- 7) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

Derivate con $\sqrt{\quad}$: $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\sqrt{x^2 - 3x - 3} \rightarrow \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-3}}$ $\sqrt{g} \rightarrow \frac{g'}{2\sqrt{g}}$

- 8) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$

- 9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)

- 10) **Disegna** prima gli asintoti, poi i punti, poi la funzione.

- 11) Funzioni come $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ assomigliano a pezzi di **coniche** (circonferenza, o ellisse, o iperbole) ma solo nella parte sopra l'asse x .

FUNZIONI ESPONENZIALI

Una funzione $y = f(x)$ è esponenziale se c'è e^x o $e^{g(x)}$. Ad esempio $f(x) = (x - 3)e^x$ $f(x) = x e^{x^2-2}$

1) **Dominio:** se non ci sono frazioni $(-\infty; +\infty)$

2) **Simmetrie:** vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)

3) **Intersezioni** con gli assi

se $x = 0$ allora $y = \dots$ se $y = 0$ allora $x = \dots$

4) **Segno** della funzione

e^x sempre positivo $e^x - 1$ positivo se $x > 0$ $e^x - k$ positivo se $x > \ln k$ $e^x + k$ sempre positivo
($k > 0$)

5) **Limiti:** dipendono dal dominio

6) ASINTOTI:

VERTICALI: se c'è una frazione con x sotto

ORIZZONTALE: se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ asintoto orizzontale $y = k$

OBLIQUO: nelle funzioni a scuola **non** ci sono asintoti obliqui

7) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

Derivate con e : $e^x \rightarrow e^x$ $e^{-x} \rightarrow -e^{-x}$ $e^{x^2-5x+2} \rightarrow (2x-5)e^{x^2-5x+2}$ $e^g \rightarrow g' \cdot e^g$

8) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$

9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)

10) **Disegna** prima gli asintoti, poi i punti, poi la funzione.

REGOLE UTILI ESPONENZIALI:

$$e^{2x} = (e^x)^2 \quad n e^{-x} = \frac{n}{e^x}$$

$$\frac{k}{e^x} = k \cdot e^{-x} \quad e^x > 0 \text{ sempre}$$

FUNZIONI LOGARITMICHE

Una funzione $y = f(x)$ è logaritmica se c'è $\ln x$ oppure $\ln g(x)$. Ad esempio $f(x) = (3x - 1) \ln(2x + 3)$

- 1) **Dominio:** dove la parte **dentro il logaritmo > 0** **Attenzione:** $\ln(-x)$ ha dominio $(-\infty; 0)$
- 2) **Simmetrie:** vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)
- 3) **Intersezioni** con gli assi
se $x = 0$ allora $y = \dots$ se $y = 0$ allora $x = \dots$
- 4) **Segno** della funzione
 $\ln x > 0$ se $x > 1$ $\ln x - k > 0$ se $x > e^k$ NON CONFONDERE: $\ln x - k \neq \ln(x - k)$
- 5) **Limiti:** dipendono dal dominio

6) ASINTOTI:

VERTICALI: se c'è una frazione con x sotto

ORIZZONTALE: se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ asintoto orizzontale $y = k$

OBLIQUO: nelle funzioni logaritmiche a scuola **non** ci sono asintoti obliqui

7) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

Derivate: $\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$ $\ln(3x^2 - 5x + 2) \rightarrow \frac{6x-5}{3x^2-5x+2}$ $\ln g \rightarrow \frac{g'}{g}$

8) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$

9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)

10) **Disegna** **prima gli asintoti**, poi i punti, poi la funzione.

REGOLE UTILI LOGARITMO:

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B \qquad \ln A^n = n \ln A \qquad \ln \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \ln A$$

$$\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B \qquad \ln \frac{1}{A} = -\ln A \qquad \log_B A = \frac{\ln A}{\ln B}$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Una funzione $y = f(x)$ è goniometrica se ci sono \sin , \cos , \tan . Ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ $f(x) = \frac{1}{2 \tan 3x}$

- 1) **Dominio:** dove la parte dentro $\tan \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k numero intero)
- 2) **Simmetrie:** vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)
- 3) **Periodo:** \sin , \cos si ripetono uguali dopo 2π , \tan si ripete uguale dopo π
- 4) **Intersezioni** con gli assi \sin se $x = 0$ allora $y = \dots$ se $y = 0$ allora $x = \dots$
- 5) **Segno** della funzione

Il segno di ogni prodotto (o divisione) si trova graficamente, come nelle disequazioni goniometriche

- 6) **Limiti:** dipendono dal dominio

- 7) ASINTOTI:

VERTICALI: se c'è una frazione con x sotto

ORIZZONTALE: nelle funzioni a scuola **non** ci sono asintoti orizzontali

OBLIQUO: nelle funzioni a scuola **non** ci sono asintoti obliqui

- 8) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

Derivate:	$\sin x \rightarrow \cos x$	$\cos x \rightarrow -\sin x$	$\tan x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$
	$\sin g \rightarrow g' \cos g$	$\cos g \rightarrow -g' \cdot \sin g$	$\tan g \rightarrow \frac{g'}{\cos^2 g}$

- 9) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$

- 10) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)

- 11) **Disegna prima gli asintoti**, poi i punti, poi la funzione.

REGOLE GONIOMETRIA:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

FUNZIONI CON PARAMETRI

Sono funzioni in cui non conosciamo alcuni numeri. Ad esempio $f(x) = \frac{x^2-a}{x+b}$ $f(x) = \frac{ax}{e^x}$

L'esercizio dà qualche indicazione per trovare il valore di $a, b \dots$ Vediamo alcuni esempi fondamentali (NON TUTTI):

PASSA PER PUNTO P: $y = \frac{x^2+a}{3x-2}$ passa per il punto $P[4; 1]$

Si sostituiscono i valori di x, y : $1 = \frac{16+a}{12-2}$ $10 = 16 + a$ $a = 6$ $y = \frac{x^2+6}{3x-2}$

ASINTOTO VERTICALE: $y = \frac{x}{x^2+a}$ ha asintoto verticale $x = 4$

Si ha asintoto verticale se $x^2 + a = 0$ quando $x = 4$, quindi $16 + a = 0$ $a = -16$ $y = \frac{x}{x^2-16}$

ASINTOTO ORIZZONTALE: $y = \frac{ax^2+1}{2x^2-1}$ ha asintoto orizzontale $y = 3$

Si ha asintoto orizzontale $y = 3$ se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+1}{2x^2-1} = 3$ cioè $\frac{a}{2} = 3$, quindi $a = 6$ $y = \frac{6x^2+1}{2x^2-1}$

ASINTOTO OBLIQUO: $y = \frac{ax^2+bx+3}{x-2}$ ha asintoto obliquo $y = 2x - 1$

Si ha asintoto obliquo se $\frac{(ax^2+bx+3)}{(x-2)} = 2x - 1 + \frac{R}{x-2}$ cioè $ax^2 + bx + 3 = (2x - 1)(x - 2) + R$

quindi $ax^2 + bx + 3 = 2x^2 - 5x + 2 + R$ cioè $a = 2, b = -5, R = 1$ $y = \frac{2x^2-5x+3}{x-2}$

MASSIMO O MINIMO: $y = \frac{ax^2+3x}{x+1}$ ha un massimo in $x = 1$

La derivata: $y' = \frac{(2ax+3)(x+1)-(ax^2+3x)}{(x+1)^2}$ è uguale a 0 se $x = 1$; $0 = \frac{(2a+3) \cdot 2 - (a+3)}{2^2}$ $a = -1$ $y = \frac{-x^2+3x}{(x+1)}$

PARI O DISPARI: $y = \frac{x^2+ax+3}{x^2-5}$ deve essere pari

Pari significa che $\frac{x^2+ax+3}{x^2-5} = \frac{x^2-ax+3}{x^2-5}$ cioè $a = 0$ $y = \frac{x^2+3}{x^2-5}$

RETTA TANGENTE: $y = (ax + b)e^x$ ha retta tangente $y = 2x - 1$ nel punto di ascissa 0

Si trova $y' = a e^x + (ax + b)e^x$ e sappiamo che $y' = 2, x = 0, y = -1$

Quindi $-1 = (a \cdot 0 + b)e^0$ $2 = a e^0 + (a \cdot 0 + b)e^0$ $b = -1$ $a = 3$ $y = (3x - 1)e^x$

INTEGRALI

Il contrario della derivata si chiama **FUNZIONE PRIMITIVA**. Esistono in generale infinite primitive di una funzione.

L'insieme di tutte le primitive si chiama **integrale indefinito**. Si scrive in questo modo:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

(si legge: integrale di effe di ics in de ics)

Se la funzione $f(x)$ non è negativa nell'intervallo $[a; b]$, l'area della parte di piano tra la funzione, l'asse x , i valori a , b (come la parte grigia di figura 1) si calcola con l'**integrale definito**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

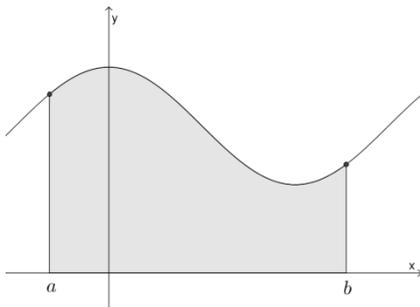


Figura 1: funzione solo positiva

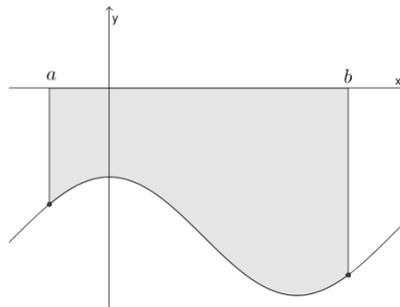


Figura 2: funzione solo negativa

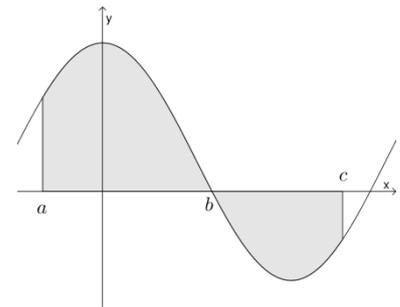


Figura 3: funzione qualsiasi

L'integrale definito è un numero! Se è **un'area**, deve essere **positivo**!

Figura 1: $Area = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Figura 2: $Area = -\int_a^b f(x) dx = -F(b) + F(a)$

Figura 3: $Area = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) - F(c) + F(b)$

La funzione $F(x) = \int f(x) dx$ è la **funzione primitiva** di $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$.

$\int dx = x + c$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\left(\begin{array}{l} \int \sqrt[k]{x} dx = \int x^{\frac{1}{k}} dx \\ \int \frac{1}{x^k} dx = \int x^{-k} dx \end{array} \right)$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$
	$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$	INTEGRALE PER PARTI $\int f'g dx = fg - \int f g' dx$	$\int k f dx = k \int f dx$
INTEGRALE PER SOSTITUZIONE $\int f[g(x)] g'(x) dx = \int f(t) dt$ $g(x) = t \quad g'(x) dx = dt$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f + c$	$\int f' \cdot f dx = \frac{1}{2} f^2 + c$
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{ \Delta }} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{ \Delta }}\right) + c$		$\Delta < 0$

L'integrale **indefinito** $\int f(x) dx$ è un insieme di **infinite funzioni** (c'è sempre +c...)

L'integrale **definito** di una funzione $\int_a^b f(x) dx$ è invece un **numero reale**.

Area: $A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ (se la funzione $f(x)$ ha lo stesso segno tra a e b)

Area tra due funzioni: $A = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx$ (f_1 è sopra f_2)

Volume di rotazione: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

METODO PER PARTI SI USA:

- 1) spesso se c'è un prodotto
- 2) spesso se c'è la funzione $\ln x$ oppure $\arctan x$

METODO PER SOSTITUZIONE SI USA:

- 1) spesso se c'è una funzione e la sua derivata
- 2) spesso quando ci sono potenze di funzioni
- 3) spesso quando ci sono funzioni con dentro funzioni
- 3) quando non sappiamo che metodo usare

Integrali per parti: quando c'è un **prodotto** tra due funzioni di solito c'è $\ln x$ oppure un polinomio
 Se c'è logaritmo: $f = \ln x$ altrimenti $f = \text{polinomio}$

Tipici esempi di integrali per parti:

$$\begin{array}{llll} \int (x \sin x) dx & \int (x \cos x) dx & \int (x e^x) dx & \int (x \ln x) dx \\ \int (k x \sin x) dx & \int (k x \cos x) dx & \int (k x e^x) dx & \int (k x \ln x) dx \\ \int (k x^n \sin x) dx & \int (k x^n \cos x) dx & \int (k x^n e^x) dx & \int (k x^n \ln x) dx \end{array}$$

$$\int \ln x dx = \int (1 \cdot \ln x) dx = \overset{PP}{\left. \begin{array}{l} f = \ln x \quad g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} \quad g = x \end{array} \right|} = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

Integrali per parti (2 volte) particolari:

$$\int \cos^2 x dx = \overset{PP}{\left. \begin{array}{l} f = \cos x \quad g' = \cos x \\ f' = -\sin x \quad g = \sin x \end{array} \right|} = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx$$

$$\text{Quindi } \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx \quad \text{cioè} \quad 2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + x$$

$$\text{Risultato: } \int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$$

$$\text{Allo stesso modo } \int \sin^2 x dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + c$$

$$\text{Allo stesso modo } \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

Integrali solo per sostituzione: di solito quando ci sono

$$e^{f(x)} \quad \sin(f(x)) \quad \cos(f(x)) \quad \ln(f(x)) \quad (f(x))^n \quad \frac{1}{(f(x))^n} \quad \sqrt{f(x)} \dots$$

Integrali per sostituzione che hanno soluzione $\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$ (alcuni esempi)

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} dx \quad \int \frac{3x^2}{x^3-8} dx \quad \int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx \quad \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \dots$$

Integrali per sostituzione in cui c'è la funzione e la sua derivata (alcuni esempi):

$$\begin{array}{lll} \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c & \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + c & \int (2x-3)(x^2-3x-8)^4 dx = \frac{1}{5} (x^2-3x-8)^5 + c \\ \int x \cos(x^2) dx = -\frac{1}{2} \sin(x^2) + c & \int \cos x (6 \sin^2 x - 2 \sin x + 5) dx = 2 \sin^3 x - \sin^2 x + 5 \sin x + c & \end{array}$$

Se c'è una **FRAZIONE** con **in basso x**:

- 1) Fare la divisione della frazione
- 2) Usare il risultato della divisione per l'integrale
- 3) Il resto della divisione avrà come integrale un logaritmo

Esempi:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x+1} dx = \int \left(x - 4 + \frac{6}{x+1} \right) dx = x^2 - 4x + 6 \ln|x+1| + c \quad (2) \quad (3) \quad (1)$$

$$(x^2 - 3x + 2) \div (x + 1) = x - 4 + \frac{6}{x+1}$$

$$\int \frac{4x^2+6x-3}{2x+1} dx = \int \left(2x - 2 - \frac{5}{2x+1} \right) dx = x^2 - 2x - \frac{5}{2} \ln|2x+1| + c \quad (2) \quad (3) \quad (1)$$

$$(4x^2 + 6x - 3) \div (2x + 1) = 2x - 2 - \frac{5}{2x+1}$$

Se c'è una **FRAZIONE** con **in basso x²**:

- 1) Fare la divisione della frazione
- 2) Si guarda il resto: se sopra è la derivata di sotto, il risultato è un logaritmo.

Ad esempio $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+7} dx = \ln|2x^2 - 5x + 7| + c$

- 3) Se sopra non c'è x si calcola il discriminante del denominatore:

- a) Se $\Delta < 0$ si trasforma il denominatore in una somma di quadrati $(kx + q)^2 + s^2$ e si sostituisce $kx + q = t$
Il risultato dell'integrale sarà $\arctan(kx + q) + c$

Oppure si impara la formula: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c$

- b) Se $\Delta = 0$ si trasforma il denominatore in $(kx + q)^2$ e si sostituisce $kx + q = t$

Oppure si impara la formula: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = -\frac{2}{2ax+b} + c$

- c) Se $\Delta > 0$ si trasforma il resto in due frazioni $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ e si trova il valore di A, B (sono numeri)

Oppure si impara la formula: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}} \right| + c$

ESERCIZI SU FUNZIONI, LIMITI, DERIVATE, INTEGRALI

Calcola la derivata di queste funzioni:

1) $y = x \cos x$

2) $y = \frac{x}{\sin x}$

3) $y = x e^x$

4) $y = \frac{\ln x}{x}$

5) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$

6) $y = \frac{3x^2-1}{x+3}$

7) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

8) $y = x^3 e^x$

9) $y = \frac{5}{\ln x}$

10) $y = 3x^2 \sin x$

11) $y = \sin^2 x$

12) $y = \sin x^2$

13) $y = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

14) $y = \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$

15) $y = 5 \ln^2 x$

16) $y = 4 \ln x^2$

17) $y = -3e^{3x+2}$

18) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$

19) $y = \cos(2x + \pi)$

20) $y = \sin(-x)$

21) $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

22) $y = (x^2 + x) \ln x$

23) $y = (e^x + x)^2$

24) $y = 3 \sin^5 x$

25) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

26) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$

27) $y = \frac{2x-5}{x-5}$

28) $y = 8 \cos x \sin x$

29) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

30) $y = x 2^x$

31) $y = 2x^3 4^x$

32) $y = 9^x - 2 \cdot 3^x$

Calcola i seguenti limiti:

33) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-4x+3}{x^2-4x+3}$

34) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}-1}{1-\cos(2x)}$

35) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 e^{-3x})$

36) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) \sin x}{2x}$

37) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$

38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

39) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\ln x}$

40) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1-\cos x)}{x^3}$

41) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$

42) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)}$

43) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{1-\cos 3x}$

44) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x)$

45) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

46) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{e^{\sin^2 x} - 1}$

47) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\ln(\cos x)}$

48) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

49) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 \ln x)$

50) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x+x}{2^x+x^2}$

51) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x+e^x}{2^x+x^2}$

52) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x-4^{x+1}}{4 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x}$

53) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$

54) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

55) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+5}{2x-3} - \frac{x}{2} \right)$

56) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}$

57) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$

58) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin x+x}$

59) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 4^{n+1} - 2^{2n-1}}{8 \cdot 4^n}$

60) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 10^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 10^{n-1}}$

61) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^{2n} + 4 \cdot 3^{2n} + 3 \cdot 4^{2n} + 2 \cdot 5^{2n}}{6^n}$

Studia e disegna le seguenti funzioni polinomiali. Di tutte trova la retta tangente in $x = 1$:

62) $y = x^3 - 3x^2$

64) $y = (x-2)(x-3)(x-6)$

66) $y = (x-1)(x+1)(4-x)$

63) $y = -x^3 + 4x$

65) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$

67) $y = \frac{-x^4 + 10x^2 - 9}{9}$

Studia e disegna le seguenti funzioni fratte. Di tutte trova la retta tangente in $x = 3$:

68) $y = x + \frac{1}{x}$

72) $y = \frac{4x^3 - 16x}{x^2 + 5}$

76) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

69) $y = \frac{2x+3}{x+1}$

73) $y = \frac{9}{9-x^2}$

77) $y = \frac{x^2-3}{2x+4}$

70) $y = \frac{(2x+2)^2}{x^2+2x+2}$

74) $y = \frac{2x}{x^2-4}$

78) $y = \frac{x^3-9x}{x^2-4}$

71) $y = \frac{x^2-x-2}{x+2}$

75) $y = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$

79) $y = \frac{9-x^2}{x^2+3}$

Studia e disegna le seguenti funzioni irrazionali.

80) $y = \sqrt{x}$

84) $y = \sqrt{8 - 2x^2}$

88) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

81) $y = x - 2\sqrt{x}$

85) $y = \sqrt{3x^2 - 12}$

89) $y = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

82) $y = \sqrt{1 - x^2}$

86) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

90) * $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

83) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

87) $y = 2x\sqrt{4 - x^2}$

Studia e disegna le seguenti funzioni esponenziali. Di ogni funzione trova l'equazione della retta tangente in $x = 2$:

91) $y = e^x$

97) $y = (x - 2)e^x$

103) $y = (2x - 3)e^x$

92) $y = (x - 1)e^x$

98) $y = 5x e^{\frac{x^2}{2}}$

104) * $y = e^{2x} - 5e^x + 4$

93) $y = \frac{x+3}{e^x}$

99) $y = 4e^{-2x^2}$

105) $y = 2x^2 e^x$

94) $y = (x + 2)e^{1-x}$

100) $y = e^{-\frac{x^2}{2}+2x} - 1$

106) * $y = e^{\frac{1}{x}}$

95) $y = x e^{-x}$

101) $y = 5(x - 1)e^{-x}$

107) $y = \frac{e^{x^2}}{x^2}$

96) $y = \frac{e^x}{x}$

102) $y = e^x - e^{-x}$

108) $y = (x^2 - 2x + 1)e^x$

Studia e disegna le seguenti funzioni logaritmiche. Di ognuna trova la retta tangente (se c'è) in $x = 2$:

109) $y = \ln x$

114) $y = \ln(16 - x^2)$

119) $y = \ln^2 x$

110) $y = \ln|x|$

115) $y = \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$

120) $y = \ln^2 x - \ln x$

111) $y = 4x \ln x$

116) $y = \ln|x^2 - 4x + 3|$

121) $y = x^2(\ln x - 1)$

112) $y = 4x \ln|x|$

117) $y = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

122) * $y = \frac{1}{\ln|x|}$

113) $y = \frac{10 \ln x}{x}$

118) $y = x(2 - \ln x^2)$

123) $y = x(2 - \ln x)$

Studia e disegna le seguenti funzioni goniometriche **nell'intervallo $[0; 2\pi)$** :

124) $y = \cos x$

129) $y = \sin x + \cos x$

134) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

125) $y = \sin x$

130) $y = \sin^2 x$

135) $y = \frac{1}{1+\cos x}$

126) $y = \tan x$

131) $y = \sin^2 x - \sin x$

136) $y = \frac{1}{\tan x}$

127) $y = 2 \cos x - 1$

132) $y = \cos(2x)$

137) $y = \frac{1}{\sin x}$

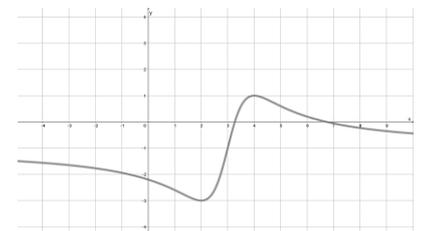
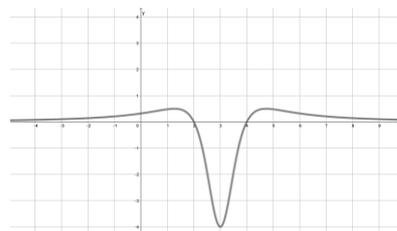
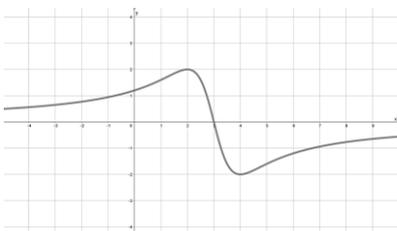
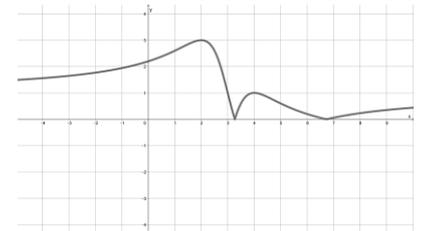
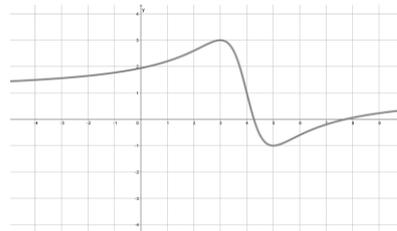
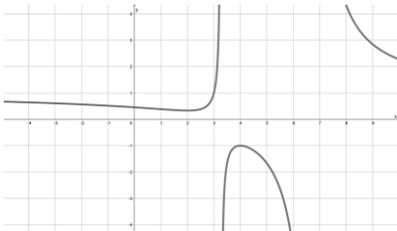
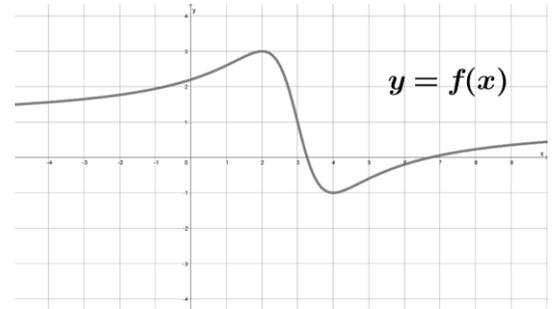
128) $y = \sqrt{3} - 2 \sin x$

133) $y = \cos(2x) - \cos x$

- 138) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2-3}{x-a}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = -5$.
- 139) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x-1}{x+a}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = 0$.
- 140) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2-5x+1}{ax+8}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = 2$.
- 141) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x-1}{ax+1}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = -1$.
- 142) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax+5}{x-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 3$.
- 143) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2+5x-2}{x^2-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2$.
- 144) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{2x^2+3x-4}{ax^2-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2$.
- 145) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{4x^2+5x-2}{ax^2-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = \frac{2}{3}$.
- 146) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2-4}{x}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2x$.
- 147) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{2x^2+ax-4}{x+1}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2x + 2$.
- 148) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2+1}{x-5}$. Trovare a in modo che la funzione passi per il punto $A(1; 2)$.
- 149) Sono date le funzioni $f_a(x) = ax^2 + \ln(x + 3)$. Trovare a in modo che la funzione passi per il punto $A(-2; -2)$.
- 150) Sono date le funzioni $f_a(x) = e^x(x + a)$. Trovare a in modo che la funzione passi per il punto $A(0; 5)$.
- 151) Sono date le funzioni $f_a(x) = e^x(x + a)$. Trovare a in modo che la funzione abbia un minimo in $x = 1$.
- 152) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2+ax}{x-1}$. Trovare a in modo che la funzione abbia un massimo in $x = -1$.
- 153) Sono date le funzioni $f_a(x) = \ln(x^2 + ax + 5)$. Trovare a in modo che la funzione abbia un minimo in $x = 1$.
- 154) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2-1}{x^2+ax+1}$. Trovare a in modo che la funzione abbia un minimo in $x = 0$.
- 155) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2+5}{x^2-a}$. Trovare a in modo che la funzione abbia l'asintoto $x = 2$.

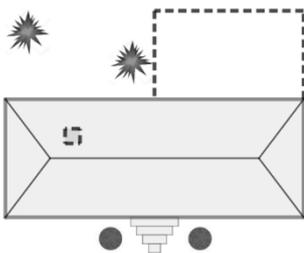
- 156) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2+bx+13}{x-1}$. Trovare a e b in modo che la funzione abbia l'asintoto $y = 2x + 5$.
- 157) Sono date le funzioni $f_a(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - x + 5$. Trova a in modo che la funzione abbia un flesso in $x = 1$.
- 158) La funzione $y = \frac{a \cdot e^{-x}}{x-b}$ ha un asintoto verticale $x = 1$ e passa per il punto $P(0; -2)$. Trova i valori di a e b e disegna la funzione.
- 159) Sono date le funzioni $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2+bx+8}{x+2}$. Trova a e b in modo da avere l'asintoto $y = 3x - 1$. Disegna la funzione.
- 160) Sono date le funzioni $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2+bx+15}{2x-1}$. Trova a e b in modo da avere l'asintoto $y = 2x + 1$. Disegna la funzione.
- 161) È data la famiglia di funzioni $f_a(x) = e^{ax}(3 - e^x)$. Trova a in modo che $f'(0) = 3$. Studia e disegna la funzione.
- 162) È data la famiglia di funzioni $f_a(x) = ax \ln x$. Trova a in modo che $f'(1) = -6$. Studia e disegna la funzione.
- 163) È data la famiglia di funzioni $f_a(x) = e^x(x - a)$. Trova a in modo che $f'(0) = -2$. Studia e disegna la funzione.
- 164) Delle funzioni $f_{a,b}(x) = x^4 - ax^2 + b$ sappiamo che $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$. Trova a e b , disegna la funzione.
- 165) La funzione $y = \ln \frac{x^2-3x+a}{x-5}$ passa per il punto $P[3; 0]$. Trova il valore di a .
- 166) La funzione $y = \frac{x+7}{ax-3}$ passa per il punto $P[2; -5]$. Trova il valore di a .
- 167) La funzione $y = \frac{x^3-x}{x+a}$ ha un asintoto in $x = 3$. Trova il valore di a .
- 168) La funzione $y = \frac{x^2+1}{ax^2+12}$ ha un asintoto in $x = 2$. Trova il valore di a .
- 169) La funzione $y = \frac{x^2+1}{ax^2+12}$ ha un asintoto in $y = 2$. Trova il valore di a .
- 170) La funzione $y = \frac{ax-5}{2x+7}$ ha un asintoto in $y = 3$. Trova il valore di a .
- 171) La funzione $y = ax^4 - 5x^2 + 4$ ha un punto stazionario (massimo o minimo) in $x = 2$. Trova il valore di a .
- 172) La funzione $y = \frac{ax^2-5x+4}{x-5}$ ha un punto stazionario in $x = 7$. Trova il valore di a .
- 173) La funzione $y = \frac{ax^2+3x+6}{x+3}$ ha un asintoto obliquo $y = 2x - 3$. Trova il valore di a .
- 174) La funzione $y = \frac{ax^2+bx+6}{2x+3}$ ha un asintoto obliquo $y = 2x - 3$. Trova il valore di a e b .
- 175) La funzione $y = (x + a)e^x$ ha un flesso in $x = 4$. Trova il valore di a .
- 176) * La funzione $y = ax^4 + bx^2 + 2$ ha un flesso nel punto $P[1; -3]$. Trova il valore di a e di b .
- 177) * La funzione $y = \frac{x^2+ax+b}{x-3}$ ha un punto stazionario $P[1; 2]$. Trova il valore di a e di b .
- 178) * La retta $y = 4x$ è tangente alla funzione $y = x^3 - ax^2 - 5x + b$ nel punto di ascissa $x = -1$. Trova a e b .

179) A destra c'è la funzione $y = f(x)$. Scegli la funzione $f'(x)$ tra le funzioni in basso e spiega perché:



180) Quali sono le dimensioni ideali per una lattina di birra (ANALCOLICA!!!) da 0.5 litri, in modo che si usi meno metallo possibile? Ricorda che il volume del cilindro è $V = \pi r^2 h$ mentre l'area totale è $A = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$.

181) Le dimensioni reali di una lattina sono: $r = 3,3\text{cm}$, $h = 17.1\text{cm}$. Spiega perché secondo te non si usano le dimensioni ideali.



182) Ho a disposizione una rete di 36m per recintare parte del mio giardino. Voglio fare un recinto in cui uso il muro della casa, come nel disegno a sinistra. Quali sono le misure per avere un recinto di area massima?

183) Disegna la funzione $f(x) = x^2 - 4x$. Disegna anche:

- a) $f(-x)$
- b) $-f(x)$
- c) $-f(-x)$
- d) $|f(x)|$
- e) $-|f(x)|$
- f) $f(|x|)$

184) Trova la distanza tra il massimo e il minimo della funzione $y = 2x^3 - 8x + 5$. Trova l'equazione della retta che passa per i due punti.

185) Trovare le coordinate del punto P della funzione $y = \sqrt{-2x^2 + 12x}$ più lontano dall'origine. Calcolare $|OP|$.

186) Esplicita y rispetto a x e semplifica l'espressione $4xy - 8x = 2y + 2x - 5$.

Calcola la derivata di queste funzioni:

187) $y = 1$ 188) $y = 2$ 189) $y = -3$ 190) $y = \frac{2}{3}$ 191) $y = e^2$ 192) $y = 0$ 193) $y = \ln 3$

194) Scrivi la funzione “primitiva” se $y' = 0$

Calcola la derivata di queste funzioni:

195) $y = x$ 198) $y = 5x$ 201) $y = \frac{2}{3}x$ 204) $y = 4x + 5$ 207) $y = \frac{8}{3}x - 1$
 196) $y = 2x$ 199) $y = -3x + 2$ 202) $y = 4x$ 205) $y = 4x - 8$ 208) $y = -x + 2$
 197) $y = -\frac{3}{2}x$ 200) $y = \frac{x}{5}$ 203) $y = 4x - 3$ 206) $y = \frac{8}{3}x$ 209) $y = -x + 7$

Scrivi la funzione primitiva:

210) $y' = 1$ 211) $y' = 4$ 212) $y' = -3$ 213) $y' = \frac{1}{3}$ 214) $y' = \sqrt{2}$

Calcola la derivata di queste funzioni:

215) $y = x^2$ 219) $y = \frac{1}{2}x^2$ 222) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 7$ 225) $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$
 216) $y = -3x^2$ 220) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 223) $y = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ 226) $y = -\frac{x^2}{2} - x - 1$
 217) $y = -2x^2 + 5x - 3$ 221) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 224) $y = \frac{2}{3}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$ 227) $y = \frac{2x^2}{3} + x$
 218) $y = -3x^2 - 4$

Scrivi la funzione primitiva:

228) $y' = 2x$ 231) $y' = -8x$ 234) $y' = x$ 237) $y' = -5x$ 240) $y' = 2x - 3$
 229) $y' = 4x$ 232) $y' = 12x$ 235) $y' = 3x$ 238) $y' = \frac{1}{2}x$ 241) $y' = 6x - 2$
 230) $y' = -4x$ 233) $y' = 20x$ 236) $y' = -x$ 239) $y' = 2x + 1$ 242) $y' = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$

Calcola la derivata:

243) $y = x^3$ 244) $y = \frac{1}{3}x^3$ 245) $y = -\frac{2}{3}x^3$ 246) $y = x^4$ 247) $y = \frac{1}{4}x^4$ 248) $y = \frac{1}{5}x^5$

Scrivi la funzione primitiva:

249) $y' = 3x^2$ 250) $y' = x^2$ 251) $y' = 9x^2$ 252) $y' = 4x^3$ 253) $y' = x^3$ 254) $y' = x^4$

Calcola la derivata:

255) $y = e^x$ 257) $y = e^x + 3$ 259) $y = -2e^x$ 261) $y = -e^x$ 263) $y = 2e^{3x}$ 265) $y = \frac{1}{6}e^{6x}$
 256) $y = e^x - 3$ 258) $y = 4e^x$ 260) $y = e^{3x}$ 262) $y = e^{-x}$ 264) $y = 3e^{2x}$ 266) $y = e^{x+5}$

Scrivi la funzione primitiva:

267) $y' = e^x$ 269) $y' = e^x + 2$ 271) $y' = 4e^{x+2}$ 273) $y' = -3e^x$ 275) $y' = \frac{1}{2}e^{2x}$ 277) $y' = 12e^{3x}$
 268) $y' = e^x + 1$ 270) $y' = 2e^x$ 272) $y' = -e^x$ 274) $y' = e^{-x}$ 276) $y' = e^{5x}$ 278) $y' = -e^{-2x}$

Scrivi la derivata:

279) $y = \sin x$ 282) $y = \frac{1}{2}\sin x$ 285) $y = -\sin(3x)$ 288) $y = \frac{1}{7}\sin(7x)$ 291) $y = \cos(3x)$
 280) $y = 2\sin x$ 283) $y = -4\sin x$ 286) $y = \frac{1}{9}\sin(9x)$ 289) $y = \cos x$ 292) $y = 2\cos(2x)$
 281) $y = -\frac{7}{2}\sin x$ 284) $y = \sin(2x)$ 287) $y = 2\sin(5x)$ 290) $y = 2\cos x$ 293) $y = \frac{1}{11}\cos(11x)$

Scrivi la funzione primitiva:

294) $y' = \cos x$ 296) $y' = -3\cos x$ 298) $y' = \cos(5x)$ 300) $y' = -2\sin x$ 302) $y' = \sin(-x)$
 295) $y' = 2\cos x$ 297) $y' = -\cos x$ 299) $y' = -\sin x$ 301) $y' = \sin x$ 303) $y' = 4\cos(-x)$

Scrivi la derivata:

- 304) $y = \ln x$ 309) $y = \ln(x - 2)$ 314) $y = \ln 2x - 7$ 319) $y = 3x + \ln(x + 2)$
 305) $y = \ln x - 3$ 310) $y = \ln(2x + 3)$ 315) $y = \ln(x^2 + x)$ 320) $y = 5 \ln x$
 306) $y = \ln(-x)$ 311) $y = \ln(x - 8)$ 316) $y = \ln(x^2 - 2)$ 321) $y = -\ln x$
 307) $y = \ln(-x) + 5$ 312) $y = \ln(8 - x)$ 317) $y = x + \ln x$ 322) $y = 2x - 4 \ln x$
 308) $y = \ln(x + 1)$ 313) $y = \ln(2x - 7)$ 318) $y = x + \ln(x + 1)$ 323) $y = x + 2 \ln x$

Scrivi la funzione iniziale:

- 324) $y' = \frac{1}{x}$ 328) $y' = \frac{2}{3x}$ 332) $y' = \frac{2}{2x+3}$ 336) $y = \frac{2x-5}{x^2-5x+3}$ 340) $y = \frac{x+2}{x}$
 325) $y' = \frac{3}{x}$ 329) $y' = \frac{8}{x}$ 333) $y' = \frac{5}{5x-1}$ 337) $y = \frac{4x+2}{2x^2+2x}$ 341) $y = \frac{3x-5}{x}$
 326) $y' = -\frac{1}{x}$ 330) $y' = \frac{1}{x+3}$ 334) $y' = \frac{4}{2x+1}$ 338) $y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ 342) $y = \frac{3x-5}{x+1}$
 327) $y' = \frac{1}{2x}$ 331) $y' = \frac{4}{x-1}$ 335) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$ 339) $y = \frac{x+1}{x}$ 343) $y = \frac{4x-3}{x-1}$

Scrivi la funzione iniziale:

- 344) $y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ 356) $y' = x^4 - 5x^2 + 4$
 345) $y' = 8x^7 - 7x^6 + 8x^3 - 6x^2 - \cos \pi$ 357) $y' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$
 346) $y' = x^3 + x^2 + x + 1$ 358) $y' = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}$
 347) $y' = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + e^5$ 359) $y' = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5x$
 348) $y' = \frac{1}{x} + e^x + \cos x + \sin x$ 360) $y' = \frac{x^2+1}{x}$
 349) $y' = \frac{2}{x} + 3e^x + 4 \cos x + 5 \sin x$ 361) $y' = \frac{2x^3-5x^2+3x+1}{x}$
 350) $y' = x^2 - 5e^x + \frac{5}{x}$ 362) $y' = \frac{5x^4-3x^3+2x^2+x+1}{x^2}$
 351) $y' = \frac{7}{x} + 2e^{2x}$ 363) $y' = \frac{2x^3-3x+5}{x^3}$
 352) $y' = -\frac{5}{x} + 3e^x - 2 \cos x - 3 \sin x$ 364) $y' = 6\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 353) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ 365) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$
 354) $y = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+1}$ 366) $y = 3 \cos x - 2 \sin x$
 355) $y = 4e^{4x} + 3e^{3x} + 2e^{2x} + 5e^x$

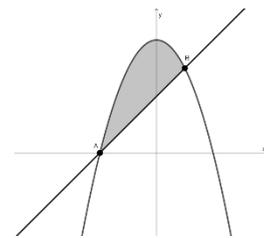
Calcola questi integrali:

- 367) $\int_{-1}^1 (-2x^4 + \frac{3}{2}x^3 + 5) dx$ 369) $\int_{-2}^2 (\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x) dx$ 371) $\int_0^\pi (\sin x + \cos x) dx$
 368) $\int_1^2 (5e^x - \frac{e^x}{5}) dx$ 370) $\int_1^{10} \frac{4}{x} dx$ 372) $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (3 \sin x - 4 \cos x) dx$

373) $\int_{-4}^{-3} \frac{5}{x} dx$

374) $\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-5} \right) dx$

375) $\int_2^1 3e^{2x} dx$

376) Trova l'area della parte tra la parabola $y = x^2 - 5x + 3$ e l'asse x .377) Trova l'area della parte scura compresa tra la parabola $y = -x^2 + 4$ e la retta $y = x + 2$ del disegno a destra.

Calcola questi integrali:

378) $\int_1^2 \frac{1}{3x} dx$

381) $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 7}{x+1} dx$

384) $\int (x \ln x - x)' dx$

379) $\int_2^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx$

382) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x^2 - 3x + 3}{x-2} dx$

385) $\int \ln x dx$

380) $\int_2^3 \frac{4x^3 - 3x^2 + 5x - 1}{x} dx$

383) $\int (\ln x)' dx$

386) $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

387) Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y = x^2 - a^2$ e dall'asse x è uguale a 36.

Calcola questi integrali:

388) $\int x \sin x dx$

391) $\int \ln(x-3) dx$

394) $\int \sin x e^x dx$

389) $\int (x-2) \cos x dx$

392) $\int (x+3) \ln(x-3) dx$

395) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

390) $\int \ln(x+1) dx$

393) $\int x^2 e^x dx$

396) $\int \ln(2x) dx$

Trova la funzione primitiva di queste funzioni:

397) $y = e^{2x} + 2e^{3x} + 3e^{4x} + 4e^{5x}$

400) $y = \frac{8x^2}{2x-1}$

403) $y = \frac{e^x}{e^{x-1}}$

398) $y = \cos(2x) + 3 \cos(3x) + 8 \cos(4x) + 10 \cos(5x)$

401) $y = \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 7}$

404) $y = \frac{10 \ln x}{x}$

399) $y = \sin(2x) - \sin(3x) + \sin(4x) - \sin(5x)$

402) $y = 3x \ln x$

405) $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

Calcola questi integrali:

381) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$

383) $\int_{-1}^0 (2x-3)^5 dx$

385) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + x}{x-1} dx$

382) $\int_0^1 (x-3)^5 dx$

384) $\int_0^1 (x-1)e^x dx$

386) $\int_1^2 x \ln x dx$

387) Si determini un valore di a nell'insieme di funzioni $f(x) = x^3 - ax^2$ in modo che l'area finita compresa tra la curva e l'asse delle ascisse sia uguale a 2.388) Calcolare l'area compresa tra il grafico della curva di equazione $f(x) = 4x^2 - 1$ e la retta di equazione $y = 2x + 1$.389) Trova a in modo che l'integrale $\int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + a) dx = 0$.390) Trova a in modo che l'integrale $\int_{-a}^a (x^2 - a^2) dx = -\frac{9}{2}$.391) Trovare la funzione primitiva di $f(x) = 4x^2 - \cos x + 4e^x$ che passa per il punto $P[0; -5]$.

Calcola i seguenti integrali:

392) $\int (e^{5x} + e^{-x}) dx$

399) $\int x e^{-x} dx$

405) $\int \frac{4x^2-4}{2x+1} dx$

393) $\int (\cos(4x) - \cos(2x)) dx$

400) $\int \sqrt{x} dx$

406) $\int \frac{4x^2-2x+4}{x^2+1} dx$

394) $\int (\sin(3x) - \sin(5x)) dx$

401) $\int x\sqrt{x^2-4} dx$

407) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

395) $\int 4 \sin x \cos^3 x dx$

402) $\int \frac{4x^2-4}{2x+1} dx$

408) $\int \frac{1}{4x^2-4x+1} dx$

396) $\int 3 \cos x \sin^5 x dx$

403) $\int \frac{4x^2-2x+4}{x^2+1} dx$

409) $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

397) $\int 12x(x^2-4)^5 dx$

404) $\int \frac{x^2+2x+2}{x^2+1} dx$

410) $\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx$

398) $\int \frac{4 \ln x}{x} dx$

411) Trova l'area della parte di piano tra la funzione $y = x^2 - 9$ e la retta $y = x - 3$.

412) Trova l'area della parte di piano finita tra la funzione $y = (x - 2)e^x$ e gli assi.

413) Trova l'area della parte di piano tra la funzione $y = \frac{x^2-5x+8}{x-1}$ e la retta $y = 2$.

414) Trova l'area della parte di piano tra la funzione $y = \frac{x^2+x+2}{x}$, le due rette $x = 1$ e $x = 2$ e l'asse x .

415) Trova a in modo che l'integrale $\int_1^e a \ln x dx = 5$.

416) Abbiamo le due funzioni $g(x) = \frac{1}{x+a}$ e $h(x) = \frac{1}{x-3}$.

a) Si trovi a in modo che $g(1) = -h(1)$;

b) Si studi e tracci la funzione $f(x) = g(x) - h(x)$ in tutte le sue parti;

c) Si trovi l'area della parte finita di piano formata dalla funzione, dall'asse delle y e dalla retta $y = x$.

417) La funzione $y = \frac{x^2+2x+a}{2x-1}$ ha un massimo in $x = -1$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto di massimo. Trova l'integrale della funzione.

418) La funzione $y = \frac{x^2-2x+a}{x^2-2x+1}$ ha $f'(0) = 2$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x = 0$. Trova l'integrale della funzione.

419) La funzione $y = \frac{8}{x^2-ax+4}$ ha $f'(0) = 1$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x = 0$. Trova l'integrale della funzione.

420) La funzione $y = axe^{2x}$ ha $f'(0) = 6$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x = -1$. Trova l'integrale della funzione.

421) La funzione $y = \frac{2x-a}{x^3}$ ha un massimo in $x = \frac{3}{4}$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto di massimo. Trova l'integrale della funzione.

422) La funzione $y = \int_a^x \frac{2t-4}{t^2-4t+5} dt$ passa per il punto $A(2; 0)$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto A .

423) La funzione $y = \int_a^x \frac{\ln t}{t} dt$ passa per il punto $A(1; 0)$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto A .

424) La funzione $y = \ln(x - a) + \ln(8 - x)$ ha $f'(5) = 0$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione in $x = 5$. Trova l'integrale della funzione.

425) La funzione $y = \int_a^x \ln t \, dt$ passa per il punto $A(e; 0)$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x = 1$.

Calcola i seguenti integrali:

$$426) \int_1^2 \frac{4 \ln x}{x} dx$$

$$429) \int (\cos(2x) \sin(2x)) dx$$

$$432) \int_0^x \frac{3}{t^2+2t+2} dt$$

$$427) \int_{-2}^0 (x e^x) dx$$

$$430) \int_{-2}^{-1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx$$

$$433) \int_{-1}^0 (4xe^{x^2}) dx$$

$$428) \int_{-2}^0 (2x e^{-2x}) dx$$

$$431) \int_0^1 \frac{4}{x^2-4} dx$$

$$434) \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx$$

435) Disegnare il grafico della funzione $y = x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x . Disegnare il solido.

436) Disegnare il grafico della funzione $y = 3x + 1$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x . Disegnare il solido.

437) Disegnare il grafico della funzione $y = e^x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x . Disegnare il solido.

438) Disegnare il grafico della funzione $y = x^2 + 1$ nell'intervallo $1 \leq x \leq 3$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x . Disegnare il solido.

439) Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y = x^2 - a^2$ e dall'asse x è uguale a 36.

440) Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y = x^2 - a^2$ e dall'asse x è uguale a $\frac{4}{3}$.

441) Dimostra che l'area della parte di piano tra la funzione $y = \frac{9x-9}{x^3}$, l'asse x e la retta $x = 3$ è uguale a 2.

442) Trova l'area della parte finita di piano limitata dalla funzione $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ e la retta $y = 3$.

443) Calcola l'area della parte di piano tra la funzione $y = x^2 + 1$ e la funzione $y = x^2$ nell'intervallo $[-1; 1]$.

444) Studia la funzione $y = \frac{10x-10}{x^3}$ e trova l'area tra 1 e 10.

Calcola i seguenti integrali:

$$445) \int x \sin x \, dx =$$

$$453) \int \frac{4}{4x^2-1} dx =$$

$$446) \int \frac{x^2-5x+7}{3} dx =$$

$$454) \int \frac{x^2+3}{x-2} dx =$$

$$447) \int (x+a) dx =$$

$$455) \int \frac{x^2-3x}{x+5} dx =$$

$$448) \int (x+a) da =$$

$$456) \int \frac{2x-1}{x^2-x} dx =$$

$$449) \int (\sin x + 2) \cos x \, dx =$$

$$457) \int (-x-2)e^{2x} dx =$$

$$450) \int 3x^2 \ln x \, dx =$$

$$458) \int \frac{2x+4}{2x^2+3x+1} dx =$$

$$451) \int \frac{2}{x^2-4x+8} dx =$$

$$459) \int \frac{\ln 2x}{x} dx =$$

$$452) \int e^{-x+2} dx =$$

460) $\int \arctan x \, dx =$

461) $\int \frac{x^2 + \ln x}{x} \, dx =$

462) $\int \frac{2x-1}{x^3} \, dx =$

463) $\int \sin x \cos x \, dx =$

464) $\int (2x - 5)^4 \, dx =$

465) * $\int \frac{2x+3}{(x-1)^3} \, dx =$

466) * $\int (e^x + 1)^3 \, dx =$

467) $\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx =$

468) * $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1} \, dx =$

469) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos x+2} \, dx =$

470) $\int_1^2 x \sin x \, dx =$

471) $\int \ln(x - 5) \, dx =$

472) $\int (\ln^2 x + 4 \ln x) \, dx =$

473) * $\int (x - 2)e^{-x} \, dx =$

474) $\int \left(\sin x - \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{1+x^2} \right) \, dx =$

475) $\int \frac{8}{4-x^2} \, dx =$

476) $\int \frac{\cos x}{\sin x+1} \, dx =$

477) $\int \frac{x^2+x}{2x+1} \, dx =$

478) $\int \frac{2x-3}{x^2-x-2} \, dx =$

479) $\int (x + 3) \sin x \, dx =$

480) $\int \sin x e^x \, dx =$

481) $\int (x - 3)^4 \, dx =$

482) $\int (3\cos^2 x + 2) \sin x \, dx =$

483) $\int \frac{6}{x^2-6x+25} \, dx$

484) $\int_0^{2\pi} \cos x e^x \, dx$

485) $\int_0^{2\pi} \cos x (\sin x - 3) \, dx$

486) $\int \left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^3 + 4x \right) \, dx =$

487) $\int \ln^2 x \, dx =$

488) $\int \pi(3x^2 - 6x) \, dx =$

489) $\int (\cos 2x - e^{4x}) \, dx =$

490) $\int \frac{x^2-3x-5}{2x-3} \, dx =$

491) $\int (-x - 2)e^{-x} \, dx =$

492) $\int \cos^2 x \, dx =$

493) $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx =$

494) $\int \frac{6}{x^2-6x+25} \, dx$

495) L'area tra la funzione $y = -x^2 + a^2$ e l'asse x è 288. Trova il valore di a .

496) Calcola il volume di rotazione della funzione $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 28x - 24}$

497) Trova i valori di a in modo che: $\int_{a-1}^{a+3} (3x^2 - 8x - 4) \, dx = 0$

498) Trova il valore di a in modo che $\int_a^{a+1} (3x^2 - 6x) \, dx = 4$

499) Trova l'area tra $f(x) = x^3 - x^2$ e $g(x) = x^3 + 3x + 2$

500) Trovare la primitiva della funzione $y = \frac{30}{25-x^2}$ passante per il punto $P[4; 0]$.

Calcola i seguenti integrali impropri:

501) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$

502) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \, dx$

503) $\int_0^2 \frac{1}{x^2} \, dx$

504) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

PREPARAZIONE ALLA MATURITÀ – PROBLEMI

- 1) Sia data la famiglia di funzioni $f_{a,b}(x) = ax^5 - bx^3 + 3x$.
 Si trovino i valori di a, b per cui la funzione abbia punti stazionari per $x = 1$ e $x = -\sqrt{3}$.
 Si studi e si disegni la funzione trovata.
 Si trovi l'area della parte delimitata dalla funzione, dall'asse x e dalla retta $y = 2$.
 Si disegni la funzione $y = |f(x)|$

- 2) La funzione $f_a(x) = \frac{x^2 - x - 6}{2x + a}$ ha un asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}x - 1$.
 Si trovi il valore di a .
 Si studi e si disegni la funzione trovata.
 Si trovi l'area della parte delimitata dalla funzione e dalla retta $y = x + 2$.
 Si trovi il punto di incontro tra gli asintoti della funzione.

- 3) La funzione $f_a(x) = \frac{a}{1-x^2}$ passa per il punto $A\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$.
 Trova il valore di a .
 Studia e disegna la funzione trovata.
 Trova l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = 2$.
 Trova la primitiva della funzione passante per il punto $B[2; 0]$.

- 4) Sia data la funzione $f(x) = (-x + a)e^{-x}$. Ha un punto stazionario in $x = -1$.
 Trova il valore di a .
 Studia e disegna la funzione trovata.
 Trova l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = 1$.
 Trova l'area della parte di piano delimitata dalla funzione e dagli assi x, y .
 Disegna la funzione $g(x) = f(-x)$

- 5) Sia data la funzione $f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x$.
 Studia e disegna la funzione.
 Trova l'equazione della tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = e$.
 Trova la primitiva della funzione.
 Disegna la funzione $g(x) = |f(x)|$

- 6) Sia data la funzione $y = \sqrt{-4x^2 + 8x + 12}$.
 Studia e disegna la funzione.
 Calcola il volume di rotazione ottenuto ruotando la funzione attorno all'asse x .
 Trova le coordinate del punto P della funzione più distante dall'origine e ne calcoli la distanza.

- 7) Sia data la funzione $f(x) = (x^2 + 4x + 4)e^{-x}$.
 Studia e disegna la funzione.
 Trova l'area della parte finita di piano tra la funzione e gli assi.
 Trova l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = -1$.
 Disegna la funzione $g(x) = -f(-x)$.

- 8) Sia data la funzione $f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$.
 Studia e disegna la funzione nell'intervallo $[0; 2\pi]$.
 Trova l'area della parte finita di piano tra la funzione e gli assi.
 Disegna la funzione $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1) $3 \cdot 9^{2x-1} = \frac{\sqrt{3}}{27}$ Tutto si può trasformare con la stessa base 3: $3^{1+4x-2} = 3^{\frac{1}{2}-3}$ $x = -\frac{3}{8}$

2) $4^{x+1} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9$ Si trasforma in: $4 \cdot 4^x + 2 \cdot \frac{4^x}{4} = 9$ e si sostituisce $4^x = t$ $x = \frac{1}{2}$

3) $8 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x$ Esponenziali con basi diverse: si trasforma tutto in logaritmo – **calcolatrice!** $x \cong 0,75$

4) $8^{2x} - 3 \cdot 8^x - 4 = 0$ Esponenziali con x e $2x$: **sostituzione** $8^x = y$, $8^{2x} = y^2$ $x = \frac{2}{3}$

5) $64^x - 3 \cdot 8^x - 4 = 0$ Esponenziali con uno quadrato dell'altro: $64^x = 8^{2x}$ come 4) $x = \frac{2}{3}$

6) $8^x - 3 - 4 \cdot 8^{-x} = 0$ Si sostituisce $8^x = t$ e $8^{-x} = \frac{1}{t}$: $t - 3 - \frac{4}{t} = 0 \quad / \cdot t$ $x = \frac{2}{3}$

1) $\log(3x + 7) = 0$ $3x + 7 = 1$ $x = -2$

2) $\log(4x + 8) = 2$ $4x + 8 = 10^2$ $x = 23$

3) $\log(7x - 12) = \log(3x + 8)$ $7x - 12 = 3x + 8$ $x = 5$

4) $2 \log(6 - 7x) = 2 + \log(x + 6)$ $(6 - 7x)^2 = 100(x + 6)$ $x_1 = \frac{282}{49}$ $x_2 = -2$

5) $\log^2 x - \log x - 2 = 0$ **Sostituzione** $\log x = t$ $(\log^2 x = t^2)$ $x = 100$ $x = 0,1$

ALCUNI CONSIGLI:

CONVIENE mettere i logaritmi a sinistra in un UNICO logaritmo

Il numero DENTRO il logaritmo non può essere negativo, ma **x può essere negativo!**

Scrivere $\log^2 x$ è diverso da $\log x^2$

VERIFICA SEMPRE LE SOLUZIONI: metti il valore di x nell'equazione iniziale

Proprietà logaritmi

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ $\ln a^b = b \ln a$ $\ln_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

NELLE DISEQUAZIONI:

Cambia la direzione di $>$, $<$ se la base del logaritmo o dell'esponenziale è più piccola di 1

Si risolvono come le equazioni. Nei logaritmi attento alle condizioni: il numero dentro **DEVE ESSERE** > 0 . Esempi:

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI:

$2^{3x-5} < \frac{1}{4}$ $3x - 5 < -2$ $x < 1$

$0,5^{3x-5} < \frac{1}{4}$ $3x - 5 > 2$ $x > \frac{7}{2}$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE:

$\ln_2(x + 2) \leq 3$ $x + 2 \leq 2^3$ $x \leq 6$ e $x > -2$ $x \in (-2; 6]$

$\ln_{0,5}(x + 2) \leq 3$ $x + 2 \geq 0,5^3$ $x \geq \frac{1}{8} - 2$ $x > -\frac{15}{8}$

Esercizi su equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche per la maturità:

- | | |
|--|---|
| 1) Risolvere l'equazione $\ln(2x - 9) + \ln(x - 5) = \ln(2x)$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = \frac{15}{2}$ |
| 2) Risolvere l'equazione $\ln(4x - 5) - \ln(x - 2) = \ln(x)$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 5$ |
| 3) Risolvere l'equazione $\ln(x + 2) + \ln(x - 1) = \ln(2x)$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 2$ |
| 4) Risolvere l'equazione $\log(x - 2) + \log(x - 5) = 1$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 7$ |
| 5) Risolvere l'equazione $\ln(x + 3) + \ln(x - 3) = 0$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = \sqrt{10}$ |
| 6) Risolvere l'equazione $e^{2x} - 3e^x = 4$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = \ln 4$ |
| 7) Risolvere l'equazione $4^x - 2^{x+1} = 8$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 2$ |
| 8) Risolvere l'equazione $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 2$ e -2 |
| 9) Risolvere l'equazione $2^{\frac{\log_1 x}{2}} = \frac{1}{4}$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 4$ |
| 10) Risolvere l'equazione $e^x - 5 \cdot e^{-x} = -4$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 0$ |
| 11) Risolvere la disequazione $2^{x+2} + 7 \cdot 2^{x-1} < 15$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x \in (-\infty; 1)$ |
| 12) Risolvere l'equazione $\log(x + 13) - \log(x - 3) = \log(x + 4)$. | Soluzione $x = 5$ |
| 13) Risolvere la disequazione $63 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2016$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x \in (-5; +\infty)$ |
| 14) Risolvere l'equazione $3 \log^2 x - 4 \log x + 1 = 0$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x = 10$ e $\sqrt[3]{10}$ |
| 15) Risolvere la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 2$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x \in \left(1; \frac{5}{4}\right]$ |
| 16) Risolvere la disequazione $\log_{0,5}(x - 2) \geq 0$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x \in (2; 3]$ |
| 17) Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \frac{1}{16}$ nell'insieme dei numeri reali. | Soluzione $x \in (-2; 2)$ |
| 18) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3e^{2x} = 13e^x + 10$. | Soluzione $x = \ln 5$ |
| 19) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $2 \cdot 10^x + 7 \cdot 10^{-x} = 15$. | Soluzione $x = \log 7$ e $\log \frac{1}{2}$ |
| 20) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 28 = 0$. | Soluzione $x = \frac{\log 4}{\log 3}$ |
| 21) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log_3 x + \log_3 \frac{x}{3} = 1 - \log_{\sqrt{3}} 3$. | Soluzione $x = 1$ |
| 22) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log^2 x = 4 \log x - 3$. | Soluzione $x = 10$ e 1000 |
| 23) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $2 \log_2 x - \log_2 \frac{x}{2} = 1 + \log_{\frac{1}{2}} 4$. | Soluzione $x = \frac{1}{4}$ |
| 24) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log_4 x + \log_4(x - 6) = \log_2 4$. | Soluzione $x = 8$ |
| 25) Nell'insieme dei numeri reali trovare l'intervallo di validità di $\ln^2 x - 4 \ln x \geq 0$. | Soluzione $x \in (0; 1] \cup [e^4; \infty)$ |
| 26) Nell'insieme dei numeri reali trovare l'intervallo di validità di $(-x - 2)e^{-x} \leq 0$. | Soluzione $x \in [-2; \infty)$ |
| 27) Risolvi l'equazione $\ln^2 x - 5 \ln x = 6$. | Soluzione $x = e^{-1}$ e e^6 |
| 28) Risolvi l'equazione $\log_4 x + \log_4 \frac{x}{4} = 1 + \log_2 4$. | Soluzione $x = 16$ |
| 29) Risolvi l'equazione $100^x - 7 \cdot 10^x + 10 = 0$. | Soluzione $x = \log 5$ e $\log 2$ |
| 30) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3e^x - 4e^{-x} = 4$ | Soluzione $x = \ln 2$ |
| 31) Nell'insieme dei numeri reali risolvere la disequazione $2^x + 2^{-x} > 2$ | Soluzione $x \neq 0$ |
| 32) Nell'insieme dei numeri reali risolvere la disequazione $\log x + \log(x - 3) \geq 1$ | Soluzione $x \in [5; +\infty)$ |

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. Le **disequazioni** si risolvono con il disegno: il coseno è sull'asse x , il seno è sull'asse y .
2. x è un ANGOLO, invece seno, coseno, tangente sono NUMERI. Le soluzioni sono ANGOLI!
3. Le equazioni **$\sin x = qualcosa$** hanno di solito **DUE** soluzioni in $[0; 2\pi)$:
 $x_1 = \alpha \quad x_2 = \pi - \alpha$ Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione
4. Le equazioni **$\cos x = qualcosa$** hanno di solito **DUE** soluzioni in $[0; 2\pi)$:
 $x_1 = \alpha \quad x_2 = 2\pi - \alpha$ Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione
5. $\sin x$ e $\cos x$ hanno periodo $2k\pi$, cioè le soluzioni sono $x_1 + 2k\pi \quad x_2 + 2k\pi$
6. Le equazioni $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ hanno **UNA** soluzione in $[0; 2\pi)$.
7. Fuori da $[-1; 1]$ l'equazione con seno e coseno ha **ZERO** soluzioni: $\sin x = \sqrt{2}$, $\cos x = -2 \dots$
8. Le equazioni **$\tan x = qualcosa$** hanno **SEMPRE DUE** soluzioni in $[0; 2\pi)$:
 $x_1 = \alpha \quad x_2 = \pi + \alpha$ Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione
9. $\tan x$ ha periodo $k\pi$, cioè le soluzioni sono $x_1 + k\pi$

FORMULE IMPORTANTI:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$	
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$	$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	
$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$	$\sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$	

Teorema dei seni:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

oppure

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Formule area triangolo:

$$Area = \frac{base \cdot altezza}{2}$$

$$A = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin \beta}{2}$$

Esercizi su equazioni e disequazioni goniometriche. Risultati tra tutti i numeri reali:

- | | |
|--|--|
| 1) Risolvere l'equazione $\sin^2 x - \cos x = 1$. | Soluzioni $x = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\} + 2k\pi$ |
| 2) Risolvere l'equazione $2 \sin x + \sqrt{2} \sin 2x = 0$. | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi \right\} + 2k\pi$ |
| 3) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin x = 1$. | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi \right\} + 2k\pi$ |
| 4) Risolvere l'equazione $\cos 4x + \sin 2x = 1$. | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2} \right\} + k\pi$ |
| 5) Risolvere l'equazione $\cos x - \cos 2x = 0$. | Soluzioni $x = \left\{ 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right\} + 2k\pi$ |
| 6) Risolvere l'equazione $\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$. | Soluzioni $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ |
| 7) Risolvere l'equazione $\cos^2 x - \sin x = 1$. | Soluzioni $x = \left\{ 0, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\} + 2k\pi$ |
| 8) Risolvere l'equazione $2 \cos^2 x + \cos 2x = 0$. | Soluzioni $x = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \right\} + 2k\pi$ |
| 9) Risolvere la disequazione $1 > \sqrt{2} \sin x$. | Soluzioni $x \in \left(\frac{3}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi \right) + 2k\pi$ |
| 10) Risolvere la disequazione $2 \cos^2 x \leq 1$. | Soluzioni $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right] + k\pi$ |

Esercizi su equazioni e disequazioni goniometriche. Tutti i risultati nell'intervallo $[0; 2\pi)$:

- | | |
|---|--|
| 11) Risolvere l'equazione $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$. | Soluzioni $x = \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{5}{6}\pi$ |
| 12) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin 2x = 1$. | Soluzioni $x = 0, \frac{\pi}{4}, \pi$ |
| 13) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin 2x = 1$. | Soluzioni $x = 0, \pi, \frac{7}{4}\pi$ |
| 14) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin x = 1$. | Soluzioni $x = 0, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ |
| 15) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin x = 1$. | Soluzioni $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$ |
| 16) Risolvere l'equazione $3 \sin x + \cos 2x = -1$. | Soluzioni $x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ |
| 17) Risolvere l'equazione $\sin^2 x + \cos x = 1 + \cos x (\cos x + 1)$. | Soluzioni $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ |
| 18) Risolvere l'equazione $\sin 2x + 1 = 0$. | Soluzioni $x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ |
| 19) Risolvere la disequazione $\sin^2 x \geq \frac{3}{4}$. | Soluzioni $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right]$ |
| 20) Risolvere la disequazione $\cos^2 x > \frac{3}{4}$. | Soluzioni $x = \left[0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi \right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi; 2\pi \right)$ |
| 21) Risolvere l'equazione $2 \cos x \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$. | Soluzioni $x = \frac{\pi}{8}; \frac{5}{8}\pi; \frac{9}{8}\pi; \frac{13}{8}\pi$ |
| 22) Risolvere l'equazione $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$. | Soluzioni $x = \frac{3}{8}\pi; \frac{7}{8}\pi; \frac{11}{8}\pi; \frac{15}{8}\pi$ |
| 23) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin 2x = 1$. | Soluzioni $x = 0; \pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi$ |

Esercizi sui triangoli. Trovare tutte le possibili soluzioni:

- 24) Risolvere il triangolo in cui $\alpha = \beta = 4\gamma$ e $c = 8$ cm. Soluzioni $\alpha = \beta = 80^\circ, \gamma = 20^\circ, a = b = 23,035$ cm $A = 90,74$ cm²
- 25) Risolvere il triangolo in cui $\alpha = 30^\circ, a = 4, c = 4\sqrt{2}$ cm.
 Soluzione 1: $\beta = 105^\circ, \gamma = 45^\circ, b = 7,73$ cm, $A = 10,93$ cm² Soluzione 2: $\beta = 15^\circ, \gamma = 135^\circ, b = 2,07$ cm, $A = 2,93$ cm²
- 26) Risolvere il triangolo in cui $a = 2b = 2c = 10$ cm. Soluzione: Non ha soluzioni, non è un triangolo

27) * La circonferenza a destra ha raggio 10 cm e $\cos \alpha = 0,6$. Trova l'area della parte grigia.

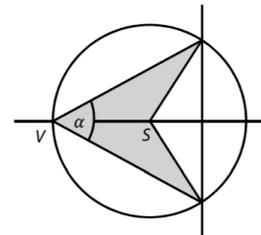
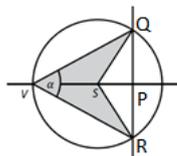
Soluzione: SQ, SR e SV sono 10 cm, perché sono il raggio.

l'angolo QSP è α , quindi $SP = SQ \cdot \cos \alpha = 6$ cm.

PQ sarà per Pitagora $PQ = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm

RQV ha area $\frac{1}{2}VP \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128$ cm² QSR ha area $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 48$ cm²

L'area grigia sarà $128 - 48 = 80$ cm²



28) Un triangolo ha lati $a, \sqrt{5a}, \sqrt{10a}$ con a numero reale, e angolo $\alpha = 45^\circ$. Trovare la lunghezza dei lati, sapendo che a è il lato opposto ad α . Soluzione: $a = 5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 5\sqrt{2}$ cm, $\beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ, A = \frac{25}{2}$ cm²

29) Trovare angoli e area di un poligono regolare di 20 lati di lunghezza 1 cm. Soluzione: $A = 31,57$ cm²

30) Risolvere il triangolo in cui $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 30^\circ$.

Soluzione 1: $c = 8$ cm, $\beta = 61^\circ, \gamma = 89^\circ, A = 14$ cm² Soluzione 2: $c = 4,13$ cm, $\beta = 119^\circ, \gamma = 31^\circ, A = 7,22$ cm²

31) I lati di un triangolo sono 5, 6, 7 cm. Trovare le dimensioni degli angoli e l'area.

Soluzioni: $\alpha = 44,4^\circ, \beta = 57,1^\circ, \gamma = 78,5^\circ, A = 14,7$ cm²

32) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono $A[2; 5], B[3; -1], C[-4; 1]$. Calcolare l'area del triangolo. Scrivere l'equazione vettoriale della retta AB .

Soluzioni: $a = \sqrt{53}, b = \sqrt{52}, c = \sqrt{37}, \alpha = 65,8^\circ, \beta = 64,6^\circ, \gamma = 49,6^\circ, A = 20$ retta $AB: X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

33) Un triangolo ha lati $a, \sqrt{2a}, 3\sqrt{a}$ con a numero reale, e l'angolo $\alpha = 45^\circ$. Trovare la lunghezza dei lati.

Soluzioni: $a = 5$ cm, $b = \sqrt{10}$ cm, $\gamma = \sqrt{45}$ cm

34) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono $A[-1; 3], B[3; 5], C[7; -3]$. Calcolare l'area del triangolo. Soluzioni: $a = \sqrt{80}, b = 10, c = \sqrt{20}, \alpha = 63,4^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 26,6^\circ, A = 20$

35) Un triangolo ha lati $a, \sqrt{2a}, 3\sqrt{a}$ con a numero reale, e l'angolo $\alpha = 135^\circ$. Trovare la lunghezza dei lati.

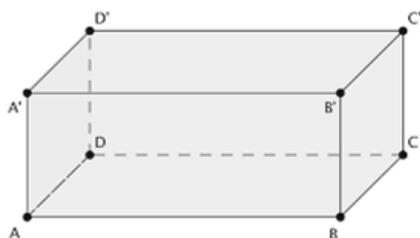
Soluzioni: $a = 17$ cm, $b = \sqrt{34}$ cm, $c = \sqrt{153}$ cm

36) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono $A[8; 15], B[-3; 7], C[4; -3]$. Calcolare l'area del triangolo. Scrivere l'equazione esplicita della retta AC .

Soluzioni: $a = \sqrt{149}, b = \sqrt{340}, c = \sqrt{185}, \alpha = 41,45^\circ, \beta = 91,05^\circ, \gamma = 47,5^\circ, A = 83$ retta $AC: y = \frac{9}{2}x - 21$

37) * Nel parallelepipedo in basso $|AD| = |AB| = 4$ cm, $|AA'| = 2$ cm. Trovare la distanza tra A e il segmento $B'D'$.

Soluzione: $\sqrt{12}$ cm, si disegna il triangolo $AB'D'$ in cui $|AB'| = |AD'| = \sqrt{20}, |B'D'| = \sqrt{32}$ e l'altezza rispetto a $B'D'$ è la soluzione.



NUMERI COMPLESSI

Il numero i ha questa caratteristica: $i^2 = -1$ Numero complesso $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$ \bar{z} **complesso coniugato** cambia il segno della parte immaginaria

Modulo $|z|$ la distanza del punto da O , si calcola con il teorema di Pitagora: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argomento θ angolo con l'asse x . Si trova DISEGNANDO z e usando i triangoli rettangoli: $\cos \theta = \frac{\text{lato lontano}}{\text{ipotenusa}}$

Se di un numero complesso conosciamo $|z|$ e θ possiamo trovare x e y : $x = |z| \cos \theta$ $y = |z| \sin \theta$

FORMA ALGEBRICA: $z = x + iy$

FORMA TRIGONOMETRICA: $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

Prodotto trigonometrico: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

Divisione trigonometrica: $z_1 \div z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$

Potenze trigonometriche: $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ Ad esempio $\left(2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^6 = 64\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$

Regole utili con il modulo: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $|z^n| = |z|^n$

Equazione $z^n = w \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta_w}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_w}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right)\right)$, con $k = 0, 1, \dots, n - 1$

Esercizi sui numeri complessi:

- 1) Trovare il modulo del numero complesso $\frac{(1+2i)^7}{(2-i)^5}$. Soluzione: 5
- 2) Trovare il modulo del numero complesso $(1 - i\sqrt{3})^8$. Soluzione: 256
- 3) Trovare tutti i numeri complessi la cui potenza seconda è uguale alla unità immaginaria i . Riportare le soluzioni nel piano di Gauss. Soluzione: $z_1 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ $z_2 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$
- 4) Dimostrare che per ogni numero reale m rappresenta la espressione $\frac{m+i}{m-i}$ l'unità complessa.

- 5) Esprimere il numero complesso $z = \log_{\frac{1}{3}} 9 + i \log_{\frac{1}{5}} 25$ in forma trigonometrica. Disegnarlo sul piano di Gauss.
 Soluzione: $z = -2 - 2i = \sqrt{8} \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)$
- 6) Risolvere nel campo complesso l'equazione: $z^4 + 1 = 0$ e rappresentare le soluzioni nella circonferenza con centro nell'origine del piano di Gauss.
 Soluzione: $z_{1,2,3,4} = \frac{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$
- 7) Risolvere l'equazione e rappresentare graficamente le soluzioni: $z^3 = 1 + i$.
 Soluzione: $z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ $z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ $z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$
- 8) Dato il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$ calcolare il valore di z^6 .
 Soluzione: $z^6 = -64$
- 9) Calcolare la parte immaginaria del numero $z = \left(\frac{1-3i}{i} \right)^8$.
 Soluzione: $y = 5376$
- 10) Calcolare la parte reale del numero $(1 - i)^8$.
 Soluzione: $x = 16$
- 11) Nell'insieme dei numeri complessi risolvere l'equazione $z^4 = (2i)^2$.
 Soluzione: $z_{1,2,3,4} = \pm 1 \pm i$
- 12) Rappresenta sul piano di Gauss tutti i punti per cui $|z| = |-3i|$.
- 13) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z| = 4$.
- 14) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z + 2 - i| = 3$.
- 15) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $z - \bar{z} = 4i$.
- 16) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z - 4 + 3i| = 2$.
- 17) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z - 4i| = |4i|$.
- 18) Disegna sul piano di Gauss tutti i punti per cui $|z + 5i| + |5i| = 8$.
- 19) Trova la parte reale del numero complesso $z = \frac{(\sqrt{3}-1)^8}{(2+2i)^4}$
- 20) Il modulo del numero complesso $z = 2a + 4 + (a + 1)i$ è uguale a 13. Trovare tutti i possibili valori di a .
 Soluzione: $a_1 = 4$ $a_2 = -\frac{38}{5}$
- 21) Risolvi l'equazione $(z^3 + i)(z^3 - i) = 0$.
 Soluzione: $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4,5,6} = \frac{\pm\sqrt{3} \pm i}{2}$
- 22) * Rappresenta sul piano di Gauss tutti i punti per cui $z + \bar{z} = -2$
- 23) * Quali di questi numeri non è un numero reale?
 A) $(2 + i)(2 - i)$ B) $\pi \cdot i^{16}$ C) $\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^2$ D) $\left(\frac{1}{i-1} \right)^2$ E) $i + \frac{1}{i}$
- 24) * La distanza sul piano di Gauss tra i numeri $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - ib$ è 8. Sia a che b sono numeri positivi. Inoltre $|z| = 8$, Trova il valore di z .
 Soluzione: $z = \sqrt{48} + 4i$
- 25) * La distanza tra z_1 e z_2 è 10. In più $z_1 = -2$ e $z_2 = 2 + bi$. Quale delle seguenti espressioni è vera?
 A) $2 + bi = 8$ B) $|4 + bi| = 10$ C) $|4 + b| = 10$ D) $|4 - b| = 10$ E) $\sqrt{4 + b^2} = 8$

CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ, STATISTICA

Operazione **FATTORIALE**: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $0! = 1$ $1! = 1$

Unica regola possibile è semplificare la divisione: $\frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5$

ANAGRAMMI: SOLE ha $4! = 24$ anagrammi MATEMATICA ha $\frac{10!}{2!2!3!} = 151.200$ anagrammi

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE: $\frac{n!}{(n-k)!}$ Scelgo **k elementi** di un gruppo di **n elementi**. L'**ordine** di scelta **cambia il risultato**. Scelgo ogni elemento **solo una volta**.

PERMUTAZIONI: $n!$ Come le **variazioni**, quando **k = n**, cioè uso tutti gli elementi

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE: n^k Scelgo **k elementi** di un gruppo di **n elementi**. L'**ordine** di scelta **cambia il risultato**. Posso scegliere un elemento **più volte**.

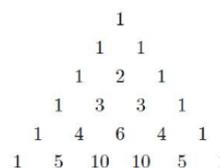
COMBINAZIONI: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Scelgo **k elementi** di un gruppo di **n elementi**. L'**ordine** di scelta **non cambia il risultato**. Scelgo ogni elemento **solo una volta**.

Giuste domande:

Posso trasformare l'esercizio in un esercizio che già conosco? Quanti elementi devo scegliere? (*k*)
 Fra quanti elementi devo scegliere? (*n*) L'ordine è importante? C'è ripetizione o no?

TRIANGOLO DI PASCAL:

Ad esempio $(A + B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$



Se i casi sono **ugualmente possibili**, la probabilità di un evento è $p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$ $0 \leq p \leq 1$

$\overline{\cup} = \text{unione "o"}$ e $\overline{\cap} = \text{intersezione "e"}$ avremo $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Se gli eventi sono **indipendenti**: $p(A \text{ e } B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Probabilità CONDIZIONATA $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (legge di Bayes)

$p(A|B)$ è la probabilità che si verifica A, se già so che si è verificato B

Media aritmetica \bar{x} $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_n}{n}$

Scarto quadratico medio o deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ $\sigma = \sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$

Esercizi su calcolo combinatorio, probabilità, statistica:

1) Calcolare le probabilità che lanciando 10 volte una moneta si verifichino gli eventi E_1 : almeno una volta esce testa; E_2 : esce sempre croce.

Soluzione: $p(E_1) = \frac{10}{1024}$ $p(E_2) = \frac{1}{1024}$

2) Risolvere l'equazione $\binom{k}{2} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{0} = 5k - 10$.

Soluzione: $k_1 = 4$ $k_2 = 5$

3) Lancio due dadi. Trova la probabilità che la somma dei due dadi:

a) sia 8

Soluzione: $\frac{5}{36}$

b) sia al massimo 8

Soluzione: $\frac{13}{18}$

c) sia almeno 8

Soluzione: $\frac{15}{36}$

d) sia meno di 8

Soluzione: $\frac{21}{36}$

e) sia più di 8

Soluzione: $\frac{5}{18}$

f) sia maggiore di 8

Soluzione: $\frac{5}{18}$

g) sia maggiore di 8 o minore di 5

Soluzione: $\frac{4}{9}$

h) sia maggiore di 8 e minore di 5

Soluzione: $\frac{0}{36}$

i) sia almeno 8 o minore di 10

Soluzione: $\frac{36}{36}$

j) sia almeno 8 e minore di 10

Soluzione: $\frac{1}{4}$

k) * sia almeno 8, se è minore di 10

Soluzione: $\frac{3}{10}$

l) * sia minore di 10, se è almeno 8

Soluzione: $\frac{3}{5}$

4) Devo distribuire 10 caramelle a 4 studenti. In quanti modi posso distribuirle:

a) se ogni studente può ricevere da 0 a 10 caramelle

Soluzione: 286

b) se ogni studente deve ricevere almeno una caramella.

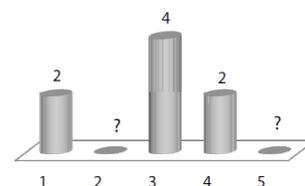
Soluzione: 84

5) Ad un concorso si possono ottenere 0, 1, 2, 3 oppure 4 punti. Tra i partecipanti, nessuno ha ottenuto 3 punti, cento hanno ottenuto 0 punti, centocinquanta hanno ottenuto 2 punti. Considerando che la mediana e la media sono uguali a 1,5 punti, calcolare il numero dei partecipanti al concorso.

Soluzione: 100

6) 13 studenti hanno scritto un test di matematica. I risultati sono a destra, non si conosce il numero degli studenti che ha preso 2 e 5. La mediana è 2. Trova la media dei voti.

Soluzione: 2,46



7) Un'urna contiene tre palline bianche e quattro nere. Si estraggono due palline (una alla volta senza rimetterle nell'urna).

a: Calcolare la probabilità di estrarre due palline bianche

Soluzione: $\frac{1}{7}$

b: Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca.

Soluzione: $\frac{5}{7}$

8) Due urne A e B hanno la seguente composizione:

A: due palline bianche e tre nere

B: una pallina bianca e due nere

Si sceglie l'urna in base all'esito del lancio di un dado: se esce un numero esattamente divisibile per tre si sceglie l'urna A altrimenti la B.

a. Calcolare la probabilità che estraendo una pallina questa sia bianca

Soluzione: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{45}$

b. Se è estratta una pallina bianca, calcola la probabilità che venga da A.

Soluzione: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \div \frac{16}{45} = \frac{3}{8}$

9) In un sacchetto sono contenute n palline: 6 rosse, le altre blu. Determina i valori di n per i quali la probabilità che, estratte due palline insieme, esse siano dello stesso colore, valga 0,5.

Soluzione: $n_1 = 16$ $n_2 = 9$

- 10) Sapendo che per uno studente la probabilità di essere miope è del 20%, quella di essere mancino è dell'8%, e che le due condizioni sono indipendenti, calcolare la probabilità che uno studente non miope sia mancino. Calcolare inoltre la probabilità che uno studente non sia né miope né mancino. Soluzione: $p_1 = 8\%$ $p_2 = 73,6\%$
- 11) Calcolare il numero minimo di lanci di una moneta che si devono fare per avere una probabilità del 99% di avere almeno 1 testa. Soluzione: 10 lanci $p = \frac{1023}{1024}$
- 12) Tra i numeri naturali risolvere l'equazione $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} - 2 = \frac{n!}{(n-1)!}$. Soluzione: $n = 4$
- 13) Scrivere lo sviluppo di $(A - B)^6$. Soluzione: $A^6 - 6A^5B + 15A^4B^2 - 20A^3B^3 + 15A^2B^4 - 6AB^5 + B^6$
- 14) I litri di benzina verde venduti quotidianamente da un distributore nell'arco di una settimana sono: 1500, 1600, 1550, 1400, 1300, 1550, 200. Calcolare la quantità media di litri venduta quotidianamente e la deviazione standard. Soluzione: media 1300 $\sigma = 459$
- 15) Una classe è formata da 23 alunni: 15 ragazze e 8 ragazzi. Si deve formare un gruppo di 5 alunni, di cui 3 ragazze e 2 ragazzi. Quanti sono i possibili gruppi? Soluzione: 12 740
- 16) Calcolare la probabilità che mescolando e riordinando a caso quattro biglietti ognuno con una delle cifre 0, 1, 2 e 7 si ottenga il numero 2017. Soluzione: $\frac{1}{24}$
- 17) Lanciando due dadi calcolare la probabilità che la somma non superi 10. Soluzione: $\frac{11}{12}$
- 18) Risolvere l'equazione $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \binom{n}{n-2} = 10n - 3$. Soluzione: 6
- 19) In un'urna ci sono 7 palline rosse e 2 bianche.
Qual è la probabilità di estrarre due palline di colore diverso? Soluzione: $\frac{7}{18}$
Estraggo una pallina e la nascondo. Poi estraggo una pallina, ed è bianca. Qual è la probabilità che la prima pallina sia rossa? Soluzione: $\frac{7}{8}$
- 20) Lancio 9 volte una moneta, calcola la probabilità che:
a) testa esca 3 volte; Soluzione: $\frac{84}{512}$
b) che testa esca più di croce. Soluzione: $\frac{1}{2}$
- 21) Lanciando due dadi, calcola la probabilità:
a) che la somma sia più di 5 e almeno uno dei due dadi sia un 4; Soluzione: $\frac{1}{4}$
b) che la somma sia più di 5 o almeno uno dei due dadi sia un 4; Soluzione: $\frac{7}{9}$
c) che la somma sia più di 5 se almeno uno dei due dadi è un 4. Soluzione: $\frac{7}{9}$
- 22) * Un numero palindromo è un numero che si legge uguale da sinistra a destra o da destra a sinistra (ad esempio 5297925). Trova quanti sono tutti i palindromi di 5 cifre in cui la prima cifra è più grande della seconda. Soluzione: 450
- 23) * Trova il valore dell'elemento senza x dello sviluppo di $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{15}$. Soluzione: $\binom{15}{10} = 3003$
- 24) * In un'urna ci sono 5 palline verdi e 3 blu. Vengono estratte 5 palline, ogni pallina estratta non viene rimessa nell'urna. Qual è la probabilità di estrarre 2 palline blu? Soluzione: $\frac{30}{56}$
- 25) * In un albergo ci sono 10 ospiti. 2 parlano ceco e italiano, 3 parlano solo ceco, 1 parla solo italiano, gli altri non parlano né ceco né italiano. Qual è la probabilità che due ospiti scelti a caso parlino tra loro italiano o ceco? Soluzione: $\frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

VETTORI IN DUE DIMENSIONI

Distanza tra due punti $A[x_1; y_1]$ e $B[x_2; y_2]$: con **Pitagora** $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Vettore **tra due punti** $A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$: $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

Lunghezza vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Angolo θ vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: si calcola guardando **DISEGNANDO** il vettore e usando i triangoli rettangoli $\cos \theta = \frac{\text{latto lontano}}{\text{ipotenusa}}$

Prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{u}$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$ oppure $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$ (φ è l'angolo tra i vettori)

Angolo tra vettori \vec{v} e \vec{u} : $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ $\cos \varphi = 0$ vettori perpendicolari $\cos \varphi = \pm 1$ paralleli

RETTE IN DUE DIMENSIONI

Equazione **esplicita** della retta: $y = kx + q$

Equazione **generale** della retta: $ax + by + c = 0$

Equazione **vettoriale** retta: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = x_0 + t v_x \\ y = y_0 + t v_y \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ punto iniziale $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ vettore spostamento

Se le $m_1 = m_2$ due rette sono **parallele** se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ due rette sono **perpendicolari**

Retta per due punti $A[x_1; y_1]$ e $B[x_2; y_2]$: $\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$ oppure $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Distanza tra la retta $r: ax + by + c = 0$ e il punto $P[x_0; y_0]$: $d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

CONICHE

CIRCONFERENZA $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ oppure $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ 

Centro e raggio $C(x_c; y_c)$ r $\alpha = -2x_c$ $\beta = -2y_c$ $\gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$

ELLISSE $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$ 

Se $a > b$:  $c^2 = a^2 - b^2$ $F_1[x_c - c; y_c]$ $F_2[x_c + c; y_c]$

Se $a < b$:  $c^2 = b^2 - a^2$ $F_1[0; y_c - c]$ $F_2[0; y_c + c]$ Area dell'ellisse $A = \pi ab$

IPERBOLE 

Equazione, fuochi e vertici se:  $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$ $V_1[x_c; -b]$ $V_2[x_c; b]$ $F_1[x_c; y_c - c]$ $F_2[x_c; y_c + c]$

Equazione, fuochi e vertici se:  $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = -1$ $V_1[-a; 0]$ $V_2[a; 0]$ $F_1[x_c - c; y_c]$ $F_2[x_c + c; y_c]$

Asintoti: $y - y_c = \frac{b}{a}(x - x_c)$ $y - y_c = -\frac{b}{a}(x - x_c)$

Esercizi su vettori, rette e coniche per la maturità:

- 1) Stabilire se le due rette $s: y = 3x - 5$ e $t: X = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono perpendicolari.
- 2) Stabilire se le due rette $s: y = -\frac{2}{3}x + 1$ e $t: X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono perpendicolari.
- 3) Trovare l'equazione vettoriale, esplicita, generale della retta che passa per i punti $A[13; -12]$ e $B[-5; 6]$.
Soluzione: $y = -x + 1$ oppure $x + y - 1 = 0$ oppure $X = \begin{bmatrix} 13 \\ -12 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- 4) Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(1, -2)$, tangente alla retta $t: x + 2y - 7 = 0$.
Soluzione: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$
- 5) Trovare l'equazione della retta passante per il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ e perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ r \end{pmatrix}$ dove r è il raggio. Soluzione: $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 6) Disegnare le circonferenze tangenti agli assi x e y e con il centro sulla retta $y = 2x - 3$. Scrivere l'equazione delle circonferenze.
Soluzione: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
- 7) Disegnare la circonferenza che passa per i punti $A[-3; 2], B[1; 2], C[1; 4]$.
- 8) Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(3; 1)$ tangente alla retta $t: y = x + 2$.
Soluzione: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$
- 9) Trovare l'equazione della retta tangente nel punto $P(5; 4)$ alla circonferenza con centro $C(1; 1)$.
Soluzione: $4x + 3y - 32 = 0$
- 10) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.
- 11) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $x^2 - y^2 = -1$. Disegnare gli eventuali fuochi.
- 12) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.
- 13) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $4x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.
- 14) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.
- 15) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$. Disegnare gli eventuali fuochi.
- 16) Scrivere l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, fuoco in $F_1[1; 0]$ e vertice in $A[-3; 0]$.
Soluzione: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$
- 17) Decidere il tipo della conica $5x^2 + y^2 = 10x$. Disegnare la conica nel sistema cartesiano.
Soluzione: ellisse $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$
- 18) Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(3, -5)$, tangente alla retta $t: x + 3y + 2 = 0$.
Soluzione: $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 10$
- 19) Disegnare la circonferenza che passa per i punti $A[0; 5], B[4; 3], C[3; 4]$. Soluzione: $x^2 + y^2 = 25$

- 20) Trovare l'equazione della retta tangente nel punto $P(5; -4)$ alla circonferenza con centro $C(1; -1)$.
Soluzione: $4x - 3y - 32 = 0$
- 21) Nel piano cartesiano trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y , tangente all'asse x in $A[2; 0]$ e passante per $B[1; 1]$.
Soluzione: $y = x^2 - 4x + 4$
- 22) Una parabola passa per il punto $G[1; 0]$ ed ha il vertice nel punto $V[4; 9]$. Scrivere l'equazione e rappresentarla graficamente. Qual è l'equazione della sua simmetrica rispetto all'origine?
Soluzione: $y = -x^2 + 8x - 7$ $y = x^2 + 8x + 7$
- 23) Trovare il valore di k per cui la retta $r: y = k - x$ risulta tangente alla parabola $p: y = x^2 - kx$. Disegnare la parabola per tale valore del parametro k .
Soluzione: $k = -1$
- 24) Risolvere la disequazione $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{x} + 1$.
Soluzione: $x \in (-\infty; -1) \cup [-\frac{1}{2}; 0)$
- 25) Risolvere la disequazione $\frac{4}{x+1} \geq \frac{x+1}{4} + \frac{3}{2}$.
Soluzione: $x \in (-\infty; -9] \cup (-1; 1]$
- 26) Nel piano cartesiano un'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani è inscritta in un rettangolo di vertici $A[2; -3]$, $B[6; -3]$, $C[6; 5]$, $D[2; 5]$. Trovare l'equazione dell'ellisse e la posizione dei fuochi.
Soluzione: $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ $F_1(4; 1 + \sqrt{12})$ $F_2(4; 1 - \sqrt{12})$
- 27) Trovare l'intersezione tra le rette $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Trova l'angolo tra le rette.
Soluzione: $P \left[-\frac{18}{23}; \frac{53}{23} \right]$ $\varphi = 73,07^\circ$
- 28) Trovare l'angolo tra le rette $y = 2x + 3$ e $y = -5x + 7$.
Soluzione: $37,87^\circ$
- 29) * Disegnare un'iperbole con centro nell'origine e in cui a, b, c sono i primi 3 elementi di una successione aritmetica di ragione 2.
Soluzione: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = \pm 1$
- 30) Disegnare l'iperbole $y = \frac{1}{x+3}$ nel piano cartesiano.
- 31) Trova centro e raggio di $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$.
Soluzione: $C[4, -3]$ $r = \sqrt{29}$
- 32) Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro in $[1; 1]$ e $a = c = 3$.
Soluzione: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{18} = 1$
- 33) Disegna l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $c = 5$ e asintoti $y = \pm \frac{3}{4}x$.
Soluzione: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
- 34) * Un'ellisse ha fuochi in $F_1[-3; -1]$ e $F_2[5; -1]$ e passa per il punto $A[1; -4]$. Scrivi l'equazione dell'ellisse e disegna.
Soluzione: $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
- 35) Scrivi l'equazione dell'ellisse inscritta nel rettangolo di vertici $[0; 0]$, $[6; 0]$, $[6; 4]$, $[0; 4]$.
Soluzione: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

SUCCESSIONI E SERIE

La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è convergente verso un numero chiamato numero di **Eulero** $e = 2,71828182845904 \dots$

La successione $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ si chiama successione ricorsiva di **Fibonacci**. I primi termini: 0 1 1 2 3 5 8 13...

PROGRESSIONE ARITMETICA: è la successione $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ oppure $a_n = a_{n-1} + d$
 (d si chiama **ragione**) $d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$

SERIE ARITMETICA: è la **somma** di una progressione aritmetica $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

PROGRESSIONE GEOMETRICA: è la successione $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ oppure $a_n = q \cdot a_{n-1}$
 (q si chiama **ragione**) $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Se $-1 < q < 1$ **convergente a 0** $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

SERIE GEOMETRICA: è la **somma** di una progressione geometrica $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Se $-1 < q < 1$ s_n è **convergente** $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}$

Esercizi sulle successioni e le serie per la maturità:

- 1) Trovare la somma di tutti i termini di una progressione geometrica di cui sappiamo che $a_3 = \frac{9}{2}$, $a_4 = -\frac{3}{4}$. Scrivere i primi 5 termini della progressione. Soluzione: $s_\infty = \frac{972}{7} \left\{162, -27, \frac{9}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8} \dots\right\}$
- 2) Determinare tutti i termini negativi della progressione aritmetica che soddisfano le condizioni: $\begin{cases} a_3 - a_5 = -48 \\ a_2 + a_3 = 8 \end{cases}$.
Trovare la somma dei primi 1000 numeri della progressione. Soluzione: $a_1 = -32$, $a_2 = -8$, $s_{1000} = 11\,956\,000$
- 3) Trovare la somma di tutti i termini di una progressione geometrica di cui sappiamo che $a_3 = 6$, $a_4 = -3$. Scrivere i primi 5 termini della progressione. Soluzione: $s_\infty = 24 \left\{24, -12, 6, -3, \frac{3}{2} \dots\right\}$
- 4) Determinare i primi cinque termini della progressione aritmetica che soddisfano le condizioni: $\begin{cases} a_3 + a_5 = 24 \\ a_3 - a_2 = 4 \end{cases}$.
Trovare la somma dei primi 1000 numeri della progressione. Soluzione: $s_{1000} = 1\,998\,000 \{0, 4, 8, 12, 16 \dots\}$
- 5) In una progressione geometrica la somma di tutti gli infiniti termini è 3. Il primo termine è 2, scrivere i primi 5 termini della progressione. Soluzione: $\left\{2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81} \dots\right\}$
- 6) In una progressione geometrica sappiamo che $a_4 = 24$, $a_5 = -12$. Scrivere i primi 5 termini della progressione. Trovare la somma di tutti gli infiniti termini. Soluzione: $\{-192, 96, -48, 24, -12\}$ $s_\infty = -128$

7) Un disegno è formato da infiniti quadrati uno accanto all'altro. Il primo quadrato a sinistra ha lato 4cm , ogni quadrato successivo ha lato metà del lato del quadrato alla sua sinistra. Trovare l'area di tutto il disegno.

Soluzione: $A = \frac{16}{3} \text{ cm}^2$

8) a) Trovare la somma di tutti i numeri pari tra 0 e 1200.

Soluzione: $s = 360\,600$

b) Quanto è la somma di tutti i numeri dispari?

Soluzione: $s = 360\,000$

9) Calcola: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \dots + 999\,999^n}{1\,000\,000^n} =$

Soluzione: 0

10) In una successione aritmetica $\begin{cases} a_{11} - a_{14} = 15 \\ a_{500} + a_{501} = -1 \end{cases}$. Trovare il primo termine e la somma dei primi 1000 termini.

Soluzione: $d = -3, s_{1000} = 500$

11) Trova la somma di tutti i numeri divisibili per 9 tra 1000 e 5000. Soluzione: 1 332 666

12) Calcola la somma dei primi 1000 elementi della successione:

1000 997 994 991 ...

Soluzione: $-498\,500$

13) In una successione geometrica il primo termine è 9 e la somma di tutti gli infiniti termini è 10. Trova i primi 5 elementi.

Soluzione: $\{9, 0.9, 0.09, 0.009, 0.0009\}$

14) Calcola la somma di tutti gli infiniti elementi della seguente successione:

9 3 1 $\frac{1}{3}$...

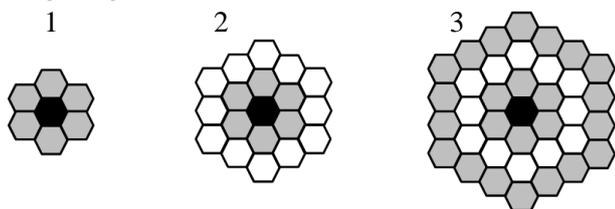
Soluzione: $\frac{27}{2}$

15) Calcola la somma dei primi 1000 elementi della successione aritmetica in cui $\begin{cases} a_7 + a_8 = 443 \\ a_{107} + a_{108} = 243 \end{cases}$

Soluzione: $s_{1000} = -271\,500$

16) * In una successione geometrica $\begin{cases} a_1 + a_2 = 4 \\ a_3 - a_1 = -16 \end{cases}$. Trova q . Soluzione: $q = -3$

17) Ogni figura in basso è formata da mattonelle e un buco nero in centro. Quale è formata da 1 260 mattonelle?



Soluzione: la 20° figura

18) * Risolvi l'equazione $\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4\,080}{2^{n+4}}$ Soluzione: $n = 8$

19) * Sono date due serie: $\begin{cases} a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots \\ b - b^2 + b^3 - b^4 + \dots \end{cases}$

Sapendo che hanno lo stesso s_∞ :

a) trova il valore di b se $a = \frac{1}{6}$

Soluzione: $b = \frac{1}{4}$

b) trova il valore di s_∞ , se $b = 2a \neq 0$

Soluzione: $s_\infty = \frac{1}{3}$

20) Viene costruita una buca. Il primo metro costa 50 €, ogni metro successivo costa 20 € in più rispetto al precedente (ad esempio una buca di 4 metri costerà $50 + 70 + 90 + 110 = 320$ €).

Calcolare il costo di una buca di 120 metri.

Soluzione: 148 800 €

Se il budget a disposizione è di 100 000 €, quanti metri potrà essere profonda la buca?

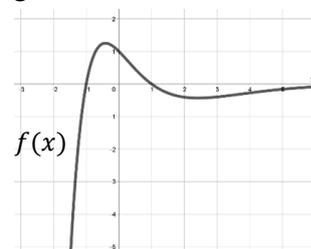
Soluzione: 98 m

21) Qual è la cifra delle unità del numero 3^{2023} ? Motiva la tua risposta.

Soluzione: 7

ESERCIZI VARI

- 1) Trova il dominio della funzione $y = \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$.
- 2) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.
- 3) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\ln(x^2-7x+10)}{e^x-1}$.
- 4) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$.
- 5) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\tan x}{x^2-9}$.
- 6) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}$.
- 7) Dimostrare che l'area della parte di piano tra la funzione $y = \frac{9x-9}{x^3}$, l'asse x e la retta $x = 3$ è uguale a 2.
- 8) Date le funzioni $f(x) = x^4 - ax^2 + b$ e sapendo che $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$, trovare a e b .
- 9) Trovare l'intersezione tra la funzione $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ e la retta $y = 1$.
- 10) Trovare l'equazione delle rette tangenti alla parabola $y = x^2 + 2x - 8$ nel punto di intersezione con l'asse x . Trovare il punto di intersezione tra le due rette.
- 11) Trovare l'area della parte finita di piano limitata dalla funzione $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ e la retta $y = 3$.
- 12) Trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$. Calcolare la distanza tra i due punti.
- 13) Trovare l'equazione della retta che passa per i punti stazionari della funzione $y = 2x^3 + 3x^2 + 7$.
- 14) Dimostra senza calcolatrice che il quadrato del numero $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ è un numero intero e calcolalo.
- 15) Semplificare al massimo l'espressione $\frac{\sqrt[3]{32} \sqrt[3]{2}}{2 \sqrt{2} \sqrt[6]{2}}$.
- 16) Dimostra che ogni rettangolo che ha un vertice nell'origine e il vertice opposto sulla funzione di equazione $y = \frac{4}{x}$ ha la stessa area. Calcola il valore di tale area.
- 17) Trova il rettangolo di area minima con un vertice nell'origine e il vertice opposto, nel primo quadrante, sulla funzione di equazione $y = \frac{x^2+3}{x^2}$. Calcola il valore di tale area.
- 18) Trova i due punti più vicini all'origine della funzione $y = \frac{3}{x}$. Calcola la distanza minima.
- 19) Trova i due punti più vicini all'origine della funzione $y = x^2 - 4$.
- 20) Trova il punto più vicino all'origine della funzione $y = \sqrt{4x^2 - 10x + 13}$. Trova il punto più vicino all'asse x della funzione, sapendo che è sempre positiva.
- 21) Trovare le coordinate del punto P della funzione $y = \sqrt{-2x^2 + 12x}$ più lontano dall'origine. Calcolare la distanza $|OP|$.
- 22) Dalla funzione $f(x)$ a destra, disegna la funzione $g(x) = -f(x)$.
- 23) Dalla funzione $f(x)$ a destra, disegna la funzione $g(x) = f(-x)$.
- 24) Dalla funzione $f(x)$ a destra, disegna la funzione $g(x) = |f(x)|$.



Riflettiamo ora su cos'è la matematica: di per sé è un sistema astratto, un'invenzione dello spirito umano, che come tale nella sua purezza non esiste. È sempre realizzato approssimativamente, ma – come tale – è un sistema intellettuale, è una grande, geniale invenzione dello spirito umano. La cosa sorprendente è che questa invenzione della nostra mente umana è veramente la chiave per comprendere la natura, che la natura è realmente strutturata in modo matematico e che la nostra matematica, inventata dal nostro spirito, è realmente lo strumento per poter lavorare con la natura, per metterla al nostro servizio, per strumentalizzarla attraverso la tecnica.

Mi sembra una cosa quasi incredibile che una invenzione dell'intelletto umano e la struttura dell'universo coincidano: la matematica inventata da noi ci dà realmente accesso alla natura dell'universo e lo rende utilizzabile per noi. Quindi la struttura intellettuale del soggetto umano e la struttura oggettiva della realtà coincidono: la ragione soggettiva e la ragione oggettivata nella natura sono identiche. Penso che questa coincidenza tra quanto noi abbiamo pensato e il come si realizza e si comporta la natura, siano un enigma ed una sfida grandi, perché vediamo che, alla fine, è “una” ragione che le collega ambedue: la nostra ragione non potrebbe scoprire quest'altra, se non vi fosse un'identica ragione a monte di ambedue.

In questo senso mi sembra proprio che la matematica ci mostri la struttura intelligente dell'universo.

(Joseph Ratzinger)