Dispensa di Matematica per la classe 6. C

FUNZIONI E INTEGRALI RIPASSO

Nome e Cognome:

PREPARAZIONE ALLA MATURITÀ

Il programma di matematica degli **ultimi tre anni** lentamente prepara gli studenti all'esame di **maturità**.

L'esame di maturità è formato da **due parti**.
La prima parte vale **60 punti**, solo lo studio di funzione vale 30-35 punti.
La seconda parte vale **40 punti,** sono 8 domande, lo studente ne sceglie 4, ogni domanda vale 10 punti.

Gli argomenti delle domande sono 21:

IV ANNO	1. Equazioni o disequazioni esponenziali
	2. Equazioni o disequazioni logaritmiche
	3. Trigonometria (teorema dei seni o del coseno)
	4. Equazioni o disequazioni goniometriche
	5. Calcolo combinatorio (ed equazioni con n!)
	6. Probabilità
	7. Statistica
	8. Numeri complessi
V ANNO	9. Punti, vettori e rette in 2D
	10. Punti, vettori, rette e piani in 3D
	11. Coniche (circonferenza, ellissi, iperbole, parabola)
	12. Successioni e serie
	13. Limiti
	14. Rette tangenti
	15. Derivate
	16. Simmetrie delle funzioni
VI ANNO	17. Funzioni ed equazioni parametriche
	18. Integrali
	19. Rotazione delle funzioni nello spazio
	20. Massimi e minimi in geometria
	21. Disequazioni (ripasso)

Per superare l'esame di maturità sono necessari **35 punti su 100**.

I temi d'esame vengono preparati dal professore e inviati a Roma, ma possono essere accettati o anche cambiati.

FUNZIONI CON LA RADICE QUADRATA

1) **Dominio**: dove la parte dentro la radice ≥ 0
2) **Simmetrie**: vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)
3) **Intersezioni** con gli assi

   se $x = 0$ allora $y =$ ... se $y = 0$ allora $x =$ ...
4) **Segno** della funzione   La radice è sempre positiva (nel dominio)
5) **Limiti**: dipendono dal dominio

   Ad esempio dominio $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$ calcola $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
6) ASINTOTI:

   VERTICALI: di solito dove la parte sotto la frazione $= 0$

   ORIZZONTALE: se $\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} f(x) = k}$ asintoto orizzontale $\boldsymbol{y = k}$

   OBLIQUO: se $\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty}$ forse può esserci un asintoto obliquo

   Si trova $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ $q = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - k\,x \right)$ k, q devono essere $\neq \infty$
7) **Derivata $\boldsymbol{f'(x)}$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

   Derivate con $\sqrt{\ }$: $\sqrt{x} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\sqrt{x^2 - 3x - 3} \to \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-3}}$ $\sqrt{g} \to \frac{g'}{2\sqrt{g}}$
8) **Derivata $\boldsymbol{f''(x)}$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$
9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)
10) **Disegna** prima gli asintoti, poi i punti, poi la funzione.

11) Funzioni come $\boldsymbol{y = \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ assomigliano a pezzi di **coniche** (circonferenza, o ellisse, o iperbole) ma solo nella parte sopra l'asse x.

FUNZIONI ESPONENZIALI

Una funzione $y = f(x)$ è esponenziale se c'è e^x o $e^{g(x)}$. Ad esempio $f(x) = (x-3)e^x$ $f(x) = x\,e^{x^2-2}$

1) **Dominio**: se non ci sono frazioni $(-\infty; +\infty)$
2) **Simmetrie**: vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)
3) **Intersezioni** con gli assi

   se $x = 0$ allora $y =$ ... se $y = 0$ allora $x =$ ...
4) **Segno** della funzione

   e^x sempre positivo $e^x - 1$ positivo se $x > 0$ $e^x - k$ positivo se $x > \ln k$ $e^x + k$ sempre positivo $(k > 0)$
5) **Limiti**: dipendono dal dominio

6) ASINTOTI:

   VERTICALI: se c'è una frazione con x sotto

   ORIZZONTALE: se $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = k}$ asintoto orizzontale $\boldsymbol{y = k}$

   OBLIQUO: nelle funzioni a scuola **non** ci sono asintoti obliqui

7) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

   Derivate con e: $e^x \to e^x$ $e^{-x} \to -e^{-x}$ $e^{x^2-5x+2} \to (2x-5)e^{x^2-5x+2}$ $e^g \to g' \cdot e^g$
8) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$
9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)
10) **Disegna** prima gli asintoti, poi i punti, poi la funzione.

REGOLE UTILI ESPONENZIALI:

$e^{2x} = (e^x)^2$ $n\,e^{-x} = \frac{n}{e^x}$

$\frac{k}{e^x} = k \cdot e^{-x}$ $e^x > 0$ sempre

FUNZIONI LOGARITMICHE

Una funzione $y = f(x)$ è logaritmica se c'è $\ln x$ oppure $\ln g(x)$. Ad esempio $f(x) = (3x-1)\ln(2x+3)$

1) **Dominio**: dove la parte dentro il logaritmo > 0 **Attenzione**: $\ln(-x)$ ha dominio $(-\infty; 0)$
2) **Simmetrie**: vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)
3) **Intersezioni** con gli assi

   se $x = 0$ allora $y =$ ... se $y = 0$ allora $x =$ ...
4) **Segno** della funzione

   $\ln x > 0$ se $x > 1$ $\ln x - k > 0$ se $x > e^k$ NON CONFONDERE: $\ln x - k \neq \ln(x-k)$
5) **Limiti**: dipendono dal dominio

6) ASINTOTI:

   VERTICALI: se c'è una frazione con x sotto

   ORIZZONTALE: se $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = k}$ asintoto orizzontale $\boldsymbol{y = k}$

   OBLIQUO: nelle funzioni logaritmiche a scuola **non** ci sono asintoti obliqui

7) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

   Derivate: $\ln x \to \frac{1}{x}$ $\ln(3x^2-5x+2) \to \frac{6x-5}{3x^2-5x+2}$ $\ln g \to \frac{g'}{g}$
8) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$
9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)
10) **Disegna** prima gli asintoti, poi i punti, poi la funzione.

REGOLE UTILI LOGARITMO:

$\ln(AB) = \ln A + \ln B$ $\ln A^n = n \ln A$ $\ln \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\ln A$

$\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B$ $\ln \frac{1}{A} = -\ln A$ $\log_B A = \frac{\ln A}{\ln B}$

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Una funzione $y = f(x)$ è goniometrica se ci sono $\sin$, $\cos$, $\tan$. Ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ $f(x) = \frac{1}{2\tan 3x}$

1) **Dominio**: dove la parte dentro $\tan \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k numero intero)
2) **Simmetrie**: vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)
3) **Periodo**: $\sin$, $\cos$ si ripetono uguali dopo 2π, $\tan$ si ripete uguale dopo π
4) **Intersezioni** con gli assi se $x = 0$ allora $y =$ ... se $y = 0$ allora $x =$ ...
5) **Segno** della funzione

   Il segno di ogni prodotto (o divisione) si trova graficamente, come nelle disequazioni goniometriche
6) **Limiti**: dipendono dal dominio
7) ASINTOTI:

   VERTICALI: se c'è una frazione con x sotto

   ORIZZONTALE: nelle funzioni a scuola **non** ci sono asintoti orizzontali

   OBLIQUO: nelle funzioni a scuola **non** ci sono asintoti obliqui

8) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

   Derivate: $\sin x \to \cos x$ $\cos x \to -\sin x$ $\tan x \to \frac{1}{\cos^2 x}$

   $\sin g \to g' \cos g$ $\cos g \to -g' \cdot \sin g$ $\tan g \to \frac{g'}{\cos^2 g}$
9) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$
10) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)
11) **Disegna** prima gli asintoti, poi i punti, poi la funzione.

REGOLE GONIOMETRIA:

$\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$	$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$	$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
$\mathbf{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

FUNZIONI CON PARAMETRI

Sono funzioni in cui non conosciamo alcuni numeri. Ad esempio $f(x)=\frac{x^2-a}{x+b}$ $f(x)=\frac{ax}{e^x}$

L'esercizio dà qualche indicazione per trovare il valore di a, b ... Vediamo alcuni esempi fondamentali (NON TUTTI):

PASSA PER PUNTO P: $y=\frac{x^2+a}{3x-2}$ passa per il punto $P[4;1]$

Si sostituiscono i valori di x, y: $1=\frac{16+a}{12-2}$ $10=16+a$ $a=6$ $\boldsymbol{y=\frac{x^2+6}{3x-2}}$

ASINTOTO VERTICALE: $y=\frac{x}{x^2+a}$ ha asintoto verticale $x=4$

Si ha asintoto verticale se $x^2+a=0$ quando $x=4$, quindi $16+a=0$ $a=-16$ $\boldsymbol{y=\frac{x}{x^2-16}}$

ASINTOTO ORIZZONTALE: $y=\frac{ax^2+1}{2x^2-1}$ ha asintoto orizzontale $y=3$

Si ha asintoto orizzontale $y=3$ se $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+1}{2x^2-1}=3$ cioè $\frac{a}{2}=3$, quindi $a=6$ $\boldsymbol{y=\frac{6x^2+1}{2x^2-1}}$

ASINTOTO OBLIQUO: $y=\frac{ax^2+bx+3}{x-2}$ ha asintoto obliquo $y=2x-1$

Si ha asintoto obliquo se $\frac{(ax^2+bx+3)}{(x-2)}=2x-1+\frac{R}{x-2}$ cioè $ax^2+bx+3=(2x-1)(x-2)+R$

quindi $ax^2+bx+3=2x^2-5x+2+R$ cioè $a=2, b=-5, R=1$ $\boldsymbol{y=\frac{2x^2-5x+3}{x-2}}$

MASSIMO O MINIMO: $y=\frac{ax^2+3x}{x+1}$ ha un massimo in $x=1$

La derivata: $y'=\frac{(2ax+3)(x+1)-(ax^2+3x)}{(x+1)^2}$ è uguale a 0 se $x=1$; $0=\frac{(2a+3)\cdot 2-(a+3)}{2^2}$ $a=-1$ $\boldsymbol{y=\frac{-x^2+3x}{(x+1)}}$

PARI O DISPARI: $y=\frac{x^2+ax+3}{x^2-5}$ deve essere pari

Pari significa che $\frac{x^2+ax+3}{x^2-5}=\frac{x^2-ax+3}{x^2-5}$ cioè $a=0$ $\boldsymbol{y=\frac{x^2+3}{x^2-5}}$

RETTA TANGENTE: $y=(ax+b)e^x$ ha retta tangente $y=2x-1$ nel punto di ascissa 0

Si trova $y'=a\,e^x+(ax+b)e^x$ e sappiamo che $y'=2, x=0, y=-1$

Quindi $-1=(a\cdot 0+b)e^0$ $2=a\,e^0+(a\cdot 0+b)e^0$ $b=-1$ $a=3$ $\boldsymbol{y=(3x-1)e^x}$

INTEGRALI

Il contrario della derivata si chiama FUNZIONE PRIMITIVA. Esistono in generale infinite primitive di una funzione.

L'insieme di tutte le primitive si chiama **integrale indefinito**. Si scrive in questo modo:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

(si legge: integrale di effe di ics in de ics)

Se la funzione $f(x)$ non è negativa nell'intervallo $[a; b]$, l'area della parte di piano tra la funzione, l'asse x, i valori $a,\ b$ (come la parte grigia di figura 1) si calcola con l'**integrale definito**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

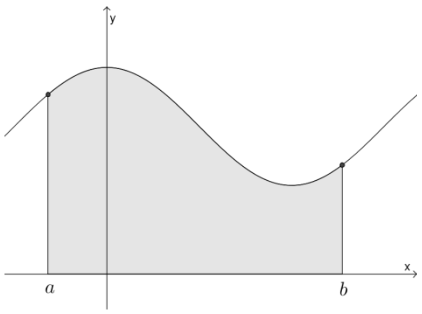


Figura 1: funzione solo positiva

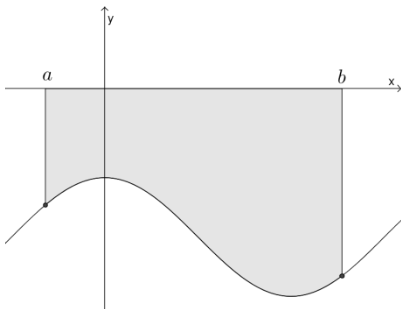


Figura 2: funzione solo negativa

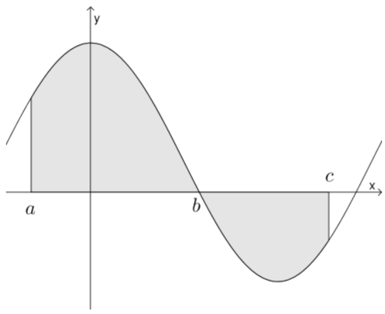


Figura 3: funzione qualsiasi

L'integrale definito è un numero! Se è un'area, deve essere positivo!

Figura 1: $Area = \int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

Figura 2: $Area = -\int_a^b f(x) = -F(b) + F(a)$

Figura 3: $Area = \int_a^b f(x) - \int_b^c f(x) = F(b) - F(a) - F(c) + F(b)$

La funzione $\boldsymbol{F(x) = \int f(x)\,dx}$ è la **funzione primitiva** di $f(x)$, cioè $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

$\int dx = x + c$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \cos x\ dx = \sin x + c$
$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$	$\int \ln x\ dx = x \ln x - x + c$	$\int \sin x\ dx = -\cos x + c$
$\begin{pmatrix} \int \sqrt[k]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{k}}\ dx \\ \int \frac{1}{x^k}\ dx = \int x^{-k}\, dx \end{pmatrix}$	$\int e^x\, dx = e^x + c$	$\int \tan x\ dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$
	$\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \arctan x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + c$
$\int (f \pm g)\, dx = \int f\ dx \pm \int g\ dx$	**INTEGRALE PER PARTI** $\int f'g\ dx = fg - \int f\ g'\ dx$	$\int k\ f\ dx = k \int f\ dx$
INTEGRALE PER SOSTITUZIONE $\int f[g(x)]\ g'(x)\ dx = \int f\ (t)\ dt$ $\quad g(x) = t \qquad g'(x)\ dx = dt$	$\int \frac{f'}{f}\ dx = \ln\lvert f\rvert + c$	$\int f' \cdot f\ dx = \frac{1}{2} f^2 + c$
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\ dx = \frac{2}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\right) + c$		$\Delta < 0$

L'integrale **indefinito** $\int f(x)\ dx$ è un insieme di **infinite funzioni** (c'è sempre $+c$…)

L'integrale **definito** di una funzione $\int_a^b f(x)\ dx$ è invece un **numero reale**.

Area: $\boldsymbol{A} = \left|\int_a^b f(x)\ dx\right|$ (se la funzione $f(x)$ ha lo stesso segno tra a e b)

Area tra due funzioni: $\boldsymbol{A} = \int_a^b f_1(x)\ dx - \int_a^b f_2(x)\ dx$ (f_1 è sopra f_2)

Volume di rotazione: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\pi} \int_a^b f^2(x)\ dx$

METODO PER PARTI SI USA:

1) spesso se c'è un prodotto
2) spesso se c'è la funzione $\ln x$ oppure $\arctan x$

METODO PER SOSTITUZIONE SI USA:

1) spesso se c'è una funzione e la sua derivata
2) spesso quando ci sono potenze di funzioni
3) spesso quando ci sono funzioni con dentro funzioni
3) quando non sappiamo che metodo usare

Integrali **per parti**: quando c'è un **prodotto** tra due funzioni di solito c'è $\ln x$ oppure un polinomio

Se c'è logaritmo: $f = \ln x$ altrimenti f =polinomio

Tipici esempi di integrali per parti:

$\int (x \sin x) dx$	$\int (x \cos x) dx$	$\int (x\, e^x) dx$	$\int (x \ln x) dx$
$\int (k\, x \sin x) dx$	$\int (k\, x \cos x) dx$	$\int (k\, x\, e^x) dx$	$\int (k\, x \ln x) dx$
$\int (k\, x^n \sin x) dx$	$\int (k\, x^n \cos x) dx$	$\int (k\, x^n e^x) dx$	$\int (k\, x^n \ln x) dx$

$$\int \boldsymbol{\ln x\, dx} = \int (1 \cdot \ln x) dx \overset{PP}{=} \left| \begin{matrix} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - \int dx = \boldsymbol{x \ln x - x + c}$$

Integrali per parti (2 volte) particolari:

$$\int \boldsymbol{\cos^2 x\, dx} \overset{PP}{=} \left| \begin{matrix} f = \cos x & g' = \cos x \\ f' = -\sin x & g = \sin x \end{matrix} \right| = \sin x \cos x + \int \sin^2 x\, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx =$$

$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx$

Quindi $\int \cos^2 x\, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx$ cioè $2 \int \cos^2 x\, dx = \sin x \cos x + x$

Risultato: $\int \boldsymbol{\cos^2 x\, dx} = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$

Allo stesso modo $\int \boldsymbol{\sin^2 x\, dx} = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + c$

Allo stesso modo $\int \boldsymbol{\sin x \cos x\, dx} = \frac{\sin^2 x}{2} + c$

Integrali solo **per sostituzione**: di solito quando ci sono

$e^{f(x)}$ $\sin(f(x))$ $\cos(f(x))$ $\ln(f(x))$ $(f(x))^n$ $\frac{1}{(f(x))^n}$ $\sqrt{f(x)}\ldots$

Integrali per sostituzione che hanno soluzione $\int \frac{f'}{f}\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\ln|f| + c}$ (alcuni esempi)

$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}\, dx$ $\int \frac{3x^2}{x^3-8}\, dx$ $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\, dx$ $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$ …

Integrali per sostituzione in cui c'è la funzione e la sua derivata (alcuni esempi):

$\int \sin x \cos x\ dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$ $\int x^2\, e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$ $\int (2x-3)(x^2-3x-8)^4\, dx = \frac{1}{5}(x^2-3x-8)^5 + c$

$\int x \cos(x^2)\ dx = -\frac{1}{2} \sin(x^2) + c$ $\int \cos x\, (6 \sin^2 x - 2 \sin x + 5)\, dx = 2 \sin^3 x - \sin^2 x + 5 \sin x + c$

Se c'è una **FRAZIONE** con in basso x:

1) Fare la divisione della frazione
2) Usare il risultato della divisione per l'integrale
3) Il resto della divisione avrà come integrale un logaritmo

Esempi:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x+1}dx \overset{(2)}{=} \int \left(x-4+\frac{6}{x+1}\right)dx \overset{(3)}{=} x^2-4x+6\ln|x+1|+c$$

$$(x^2-3x+2) \div (x+1) \overset{(1)}{=} x-4+\frac{6}{x+1}$$

$$\int \frac{4x^2+6x-3}{2x+1}dx \overset{(2)}{=} \int \left(2x-2-\frac{5}{2x+1}\right)dx \overset{(3)}{=} x^2-2x-\frac{5}{2}\ln|2x+1|+c$$

$$(4x^2+6x-3) \div (2x+1) \overset{(1)}{=} 2x-2-\frac{5}{2x+1}$$

Se c'è una **FRAZIONE** con in basso $\boldsymbol{x^2}$:

1) Fare la divisione della frazione
2) Si guarda il resto: se sopra è la derivata di sotto, il risultato è un logaritmo.

   Ad esempio $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+7}dx = \ln|2x^2-5x+7|+c$

3) Se sopra non c'è x si calcola il discriminante del denominatore:

   a) Se $\Delta < 0$ si trasforma il denominatore in una somma di quadrati $(kx+q)^2+s^2$ e si sostituisce $kx+q=t$
   Il risultato dell'integrale sarà $\arctan(kx+q)+c$

   Oppure si impara la formula: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c$

   b) Se $\Delta = 0$ si trasforma il denominatore in $(kx+q)^2$ e si sostituisce $kx+q=t$

   Oppure si impara la formula: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = -\frac{2}{2ax+b}+c$

   c) Se $\Delta > 0$ si trasforma il resto in due frazioni $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ e si trova il valore di A, B (sono numeri)

   Oppure si impara la formula: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right|+c$

ESERCIZI SU FUNZIONI, LIMITI, DERIVATE, INTEGRALI

Calcola la derivata di queste funzioni:

1) $y = x\cos x$
2) $y = \frac{x}{\sin x}$
3) $y = x\, e^x$
4) $y = \frac{\ln x}{x}$
5) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$
6) $y = \frac{3x^2-1}{x+3}$
7) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$
8) $y = x^3 e^x$
9) $y = \frac{5}{\ln x}$
10) $y = 3x^2 \sin x$
11) $y = \sin^2 x$
12) $y = \sin x^2$
13) $y = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$
14) $y = \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$
15) $y = 5\ln^2 x$
16) $y = 4\ln x^2$
17) $y = -3e^{3x+2}$
18) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$
19) $y = \cos(2x+\pi)$
20) $y = \sin(-x)$
21) $y = \ln(x^2-3x+2)$
22) $y = (x^2+x)\ln x$
23) $y = (e^x+x)^2$
24) $y = 3\sin^5 x$
25) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$
26) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$
27) $y = \frac{2x-5}{x-5}$
28) $y = 8\cos x \sin x$
29) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$
30) $y = x\, 2^x$
31) $y = 2x^3 4^x$
32) $y = 9^x - 2\cdot 3^x$

Calcola i seguenti limiti:

33) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x+3}{x^2-4x+3}$
34) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{1-\cos(2x)}$
35) $\lim_{x\to +\infty} (x^3 e^{-3x})$
36) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)\sin x}{2x}$
37) $* \lim_{x\to 0^+} (x\ln x)$
38) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$
39) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{\ln x}$
40) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3}$
41) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$
42) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)}$
43) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{1-\cos 3x}$
44) $* \lim_{x\to -\infty} (x\, e^x)$
45) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x}$
46) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{e^{\sin^2 x}-1}$
47) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(\cos x)}$
48) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$
49) $\lim_{x\to 0^+} (3x^2\ln x)$
50) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x+x}{2^x+x^2}$
51) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x+e^x}{2^x+x^2}$
52) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x-4^{x+1}}{4\cdot 2^x+2\cdot 4^x}$
53) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$
54) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
55) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+5}{2x-3} - \frac{x}{2}\right)$
56) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x-\sin x}$
57) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$
58) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin x + x}$
59) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4^{n+1}-2^{n-1}}{8\cdot 4^n}$
60) $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 10^{n+1}-5^{n-1}}{2\cdot 10^{n-1}}$
61) $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n+4\cdot 3^n+3\cdot 4^n+2\cdot 5^n}{6^n}$

Studia e disegna le seguenti funzioni polinomiali. Di tutte trova la retta tangente in $x = 1$:

62) $y = x^3 - 3x^2$
63) $y = -x^3 + 4x$
64) $y = (x-2)(x-3)(x-6)$
65) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$
66) $y = (x-1)(x+1)(4-x)$
67) $y = \frac{-x^4+10x^2-9}{9}$

Studia e disegna le seguenti funzioni fratte. Di tutte trova la retta tangente in $x = 3$:

68) $y = x + \frac{1}{x}$

69) $y = \frac{2x+3}{x+1}$

70) $y = \frac{(2x+2)^2}{x^2+2x+2}$

71) $y = \frac{x^2-x-2}{x+2}$

72) $y = \frac{4x^3-16x}{x^2+5}$

73) $y = \frac{9}{9-x^2}$

74) $y = \frac{2x}{x^2-4}$

75) $y = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$

76) $y = \frac{x^3}{x^2-3}$

77) $y = \frac{x^2-3}{2x+4}$

78) $y = \frac{x^3-9x}{x^2-4}$

79) $y = \frac{9-x^2}{x^2+3}$

Studia e disegna le seguenti funzioni irrazionali.

80) $y = \sqrt{x}$

81) $y = x - 2\sqrt{x}$

82) $y = \sqrt{1-x^2}$

83) $y = \sqrt{x^2-1}$

84) $y = \sqrt{8-2x^2}$

85) $y = \sqrt{3x^2-12}$

86) $y = \sqrt{x^2+2x+2}$

87) $y = 2x\sqrt{4-x^2}$

88) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

89) $y = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

90) * $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Studia e disegna le seguenti funzioni esponenziali. Di ogni funzione trova l'equazione della retta tangente in $x = 2$:

91) $y = e^x$

92) $y = (x-1)e^x$

93) $y = \frac{x+3}{e^x}$

94) $y = (x+2)e^{1-x}$

95) $y = x\,e^{-x}$

96) $y = \frac{e^x}{x}$

97) $y = (x-2)e^x$

98) $y = 5x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

99) $y = 4e^{-2x^2}$

100) $y = e^{-\frac{x^2}{2}+2x} - 1$

101) $y = 5(x-1)e^{-x}$

102) $y = e^x - e^{-x}$

103) $y = (2x-3)e^x$

104) * $y = e^{2x} - 5\,e^x + 4$

105) $y = 2x^2e^x$

106) * $y = e^{\frac{1}{x}}$

107) $y = \frac{e^{x^2}}{x^2}$

108) $y = (x^2-2x+1)e^x$

Studia e disegna le seguenti funzioni logaritmiche. Di ognuna trova la retta tangente (se c'è) in $x = 2$:

109) $y = \ln x$

110) $y = \ln|x|$

111) $y = 4x\ln x$

112) $y = 4x\ln|x|$

113) $y = \frac{10\ln x}{x}$

114) $y = \ln(16-x^2)$

115) $y = \ln(x+1) - \ln(x+2)$

116) $y = \ln|x^2-4x+3|$

117) $y = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

118) $y = x(2-\ln x^2)$

119) $y = \ln^2 x$

120) $y = \ln^2 x - \ln x$

121) $y = x^2(\ln x - 1)$

122) * $y = \frac{1}{\ln|x|}$

123) $y = x(2-\ln x)$

Studia e disegna le seguenti funzioni goniometriche **nell'intervallo $[0; 2\pi)$**:

124) $y = \cos x$

125) $y = \sin x$

126) $y = \tan x$

127) $y = 2\cos x - 1$

128) $y = \sqrt{3} - 2\sin x$

129) $y = \sin x + \cos x$

130) $y = \sin^2 x$

131) $y = \sin^2 x - \sin x$

132) $y = \cos(2x)$

133) $y = \cos(2x) - \cos x$

134) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

135) $y = \frac{1}{1+\cos x}$

136) $y = \frac{1}{\tan x}$

137) $y = \frac{1}{\sin x}$

138) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2-3}{x-a}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = -5$.

139) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x-1}{x+a}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = 0$.

140) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2-5x+1}{ax+8}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = 2$.

141) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x-1}{ax+1}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $x = -1$.

142) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax+5}{x-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 3$.

143) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2+5x-2}{x^2-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2$.

144) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{2x^2+3x-4}{ax^2-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2$.

145) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{4x^2+5x-2}{ax^2-3}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = \frac{2}{3}$.

146) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2-4}{x}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2x$.

147) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{2x^2+ax-4}{x+1}$ dove a è un parametro reale. Trova il valore di a in modo che la funzione abbia per asintoto la retta $y = 2x + 2$.

148) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2+1}{x-5}$. Trovare a in modo che la funzione passi per il punto $A(1; 2)$.

149) Sono date le funzioni $f_a(x) = ax^2 + \ln(x + 3)$. Trovare a in modo che la funzione passi per il punto $A(-2; -2)$.

150) Sono date le funzioni $f_a(x) = e^x(x + a)$. Trovare a in modo che la funzione passi per il punto $A(0; 5)$.

151) Sono date le funzioni $f_a(x) = e^x(x + a)$. Trovare a in modo che la funzione abbia un minimo in $x = 1$.

152) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2+ax}{x-1}$. Trovare a in modo che la funzione abbia un massimo in $x = -1$.

153) Sono date le funzioni $f_a(x) = \ln(x^2 + ax + 5)$. Trovare a in modo che la funzione abbia un minimo in $x = 1$.

154) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2-1}{x^2+ax+1}$. Trovare a in modo che la funzione abbia un minimo in $x = 0$.

155) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{x^2+5}{x^2-a}$. Trovare a in modo che la funzione abbia l'asintoto $x = 2$.

156) Sono date le funzioni $f_a(x) = \frac{ax^2+bx+13}{x-1}$. Trovare a e b in modo che la funzione abbia l'asintoto $y = 2x + 5$.

157) Sono date le funzioni $f_a(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - x + 5$. Trova a in modo che la funzione abbia un flesso in $x = 1$.

158) La funzione $y = \frac{a \cdot e^{-x}}{x-b}$ ha un asintoto verticale $x = 1$ e passa per il punto $P(0; -2)$. Trova i valori di a e b e disegna la funzione.

159) Sono date le funzioni $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2+bx+8}{x+2}$. Trova a e b in modo da avere l'asintoto $y = 3x - 1$. Disegna la funzione.

160) Sono date le funzioni $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2+bx+15}{2x-1}$. Trova a e b in modo da avere l'asintoto $y = 2x + 1$. Disegna la funzione.

161) È data la famiglia di funzioni $f_a(x) = e^{ax}(3 - e^x)$. Trova a in modo che $f'(0) = 3$. Studia e disegna la funzione.

162) È data la famiglia di funzioni $f_a(x) = ax \ln x$. Trova a in modo che $f'(1) = -6$. Studia e disegna la funzione.

163) È data la famiglia di funzioni $f_a(x) = e^x(x - a)$. Trova a in modo che $f'(0) = -2$. Studia e disegna la funzione.

164) Delle funzioni $f_{a,b}(x) = x^4 - ax^2 + b$ sappiamo che $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$. Trova a e b, disegna la funzione.

165) La funzione $y = \ln \frac{x^2-3x+a}{x-5}$ passa per il punto $P[3; 0]$. Trova il valore di a.

166) La funzione $y = \frac{x+7}{ax-3}$ passa per il punto $P[2; -5]$. Trova il valore di a.

167) La funzione $y = \frac{x^3-x}{x+a}$ ha un asintoto in $x = 3$. Trova il valore di a.

168) La funzione $y = \frac{x^2+1}{ax^2+12}$ ha un asintoto in $x = 2$. Trova il valore di a.

169) La funzione $y = \frac{x^2+1}{ax^2+12}$ ha un asintoto in $y = 2$. Trova il valore di a.

170) La funzione $y = \frac{ax-5}{2x+7}$ ha un asintoto in $y = 3$. Trova il valore di a.

171) La funzione $y = ax^4 - 5x^2 + 4$ ha un punto stazionario (massimo o minimo) in $x = 2$. Trova il valore di a.

172) La funzione $y = \frac{ax^2-5x+4}{x-5}$ ha un punto stazionario in $x = 7$. Trova il valore di a.

173) La funzione $y = \frac{ax^2+3x+6}{x+3}$ ha un asintoto obliquo $y = 2x - 3$. Trova il valore di a.

174) La funzione $y = \frac{ax^2+bx+6}{2x+3}$ ha un asintoto obliquo $y = 2x - 3$. Trova il valore di a e b.

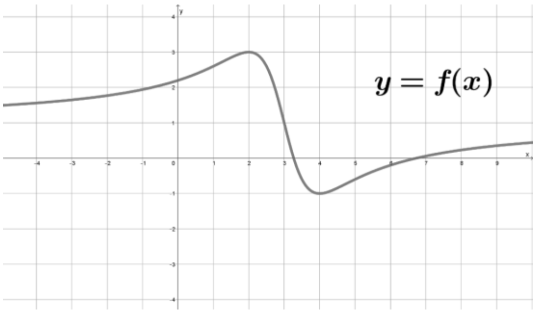
175) La funzione $y = (x + a)e^x$ ha un flesso in $x = 4$. Trova il valore di a.

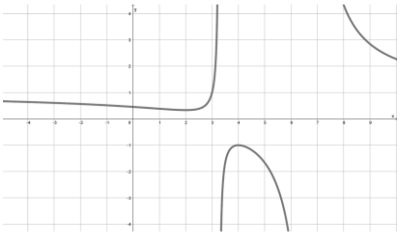
176) * La funzione $y = ax^4 + bx^2 + 2$ ha un flesso nel punto $P[1; -3]$. Trova il valore di a e di b.

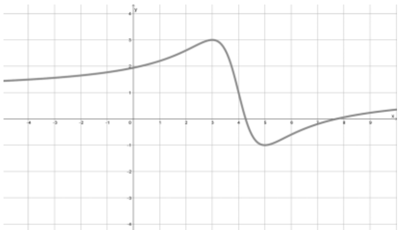
177) * La funzione $y = \frac{x^2+ax+b}{x-3}$ ha un punto stazionario $P[1; 2]$. Trova il valore di a e di b.

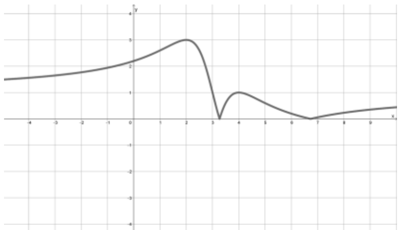
178) * La retta $y = 4x$ è tangente alla funzione $y = x^3 - ax^2 - 5x + b$ nel punto di ascissa $x = -1$. Trova a e b.

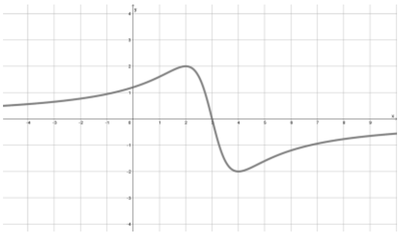
179) A destra c'è la funzione $y = f(x)$. Scegli la funzione $f'(x)$ tra le funzioni in basso e spiega perché:

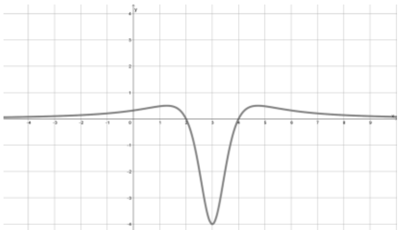


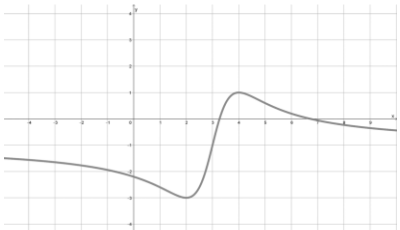






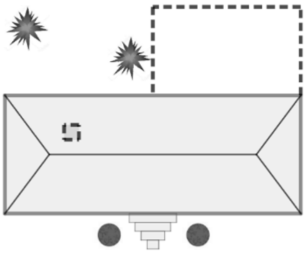






180) Quali sono le dimensioni ideali per una lattina di birra (ANALCOLICA!!!) da 0.5 litri, in modo che si usi meno metallo possibile? Ricorda che il volume del cilindro è $V = \pi \, r^2 \, h$ mentre l'area totale è $A = 2 \, \pi \, r^2 + 2 \, \pi \, r \, h$.

181) Le dimensioni reali di una lattina sono: r =3,3cm, h =17.1cm. Spiega perché secondo te non si usano le dimensioni ideali.



182) Ho a disposizione una rete di 36m per recintare parte del mio giardino. Voglio fare un recinto in cui uso il muro della casa, come nel disegno a sinistra. Quali sono le misure per avere un recinto di area massima?

183) Disegna la funzione $f(x) = x^2 - 4x$. Disegna anche:

a) $f(-x)$ b) $-f(x)$ c) $-f(-x)$ d) $|f(x)|$ e) $-|f(x)|$ f) $f(|x|)$

184) Trova la distanza tra il massimo e il minimo della funzione $y = 2x^3 - 8x + 5$. Trova l'equazione della retta che passa per i due punti.

185) Trovare le coordinate del punto P della funzione $y = \sqrt{-2x^2 + 12x}$ più lontano dall'origine. Calcolare $|OP|$.

186) Esplicita y rispetto a x e semplifica l'espressione $4xy - 8x = 2y + 2x - 5$.

Calcola la derivata di queste funzioni:

187) $y = 1$ 188) $y = 2$ 189) $y = -3$ 190) $y = \frac{2}{3}$ 191) $y = e^2$ 192) $y = 0$ 193) $y = \ln 3$

194) Scrivi la funzione “primitiva” se $y' = 0$

Calcola la derivata di queste funzioni:

195) $y = x$ 198) $y = 5x$ 201) $y = \frac{2}{3}x$ 204) $y = 4x + 5$ 207) $y = \frac{8}{3}x - 1$

196) $y = 2x$ 199) $y = -3x + 2$ 202) $y = 4x$ 205) $y = 4x - 8$ 208) $y = -x + 2$

197) $y = -\frac{3}{2}x$ 200) $y = \frac{x}{5}$ 203) $y = 4x - 3$ 206) $y = \frac{8}{3}x$ 209) $y = -x + 7$

Scrivi la funzione primitiva:

210) $y' = 1$ 211) $y' = 4$ 212) $y' = -3$ 213) $y' = \frac{1}{3}$ 214) $y' = \sqrt{2}$

Calcola la derivata di queste funzioni:

215) $y = x^2$ 219) $y = \frac{1}{2}x^2$ 222) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 7$ 225) $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$

216) $y = -3x^2$ 220) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 223) $y = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ 226) $y = -\frac{x^2}{2} - x - 1$

217) $y = -2x^2 + 5x - 3$ 221) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 224) $y = \frac{2}{3}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$ 227) $y = \frac{2x^2}{3} + x$

218) $y = -3x^2 - 4$

Scrivi la funzione primitiva:

228) $y' = 2x$ 231) $y' = -8x$ 234) $y' = x$ 237) $y' = -5x$ 240) $y' = 2x - 3$

229) $y' = 4x$ 232) $y' = 12x$ 235) $y' = 3x$ 238) $y' = \frac{1}{2}x$ 241) $y' = 6x - 2$

230) $y = -4x$ 233) $y' = 20x$ 236) $y' = -x$ 239) $y' = 2x + 1$ 242) $y' = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$

Calcola la derivata:

243) $y = x^3$ 244) $y = \frac{1}{3}x^3$ 245) $y = -\frac{2}{3}x^3$ 246) $y = x^4$ 247) $y = \frac{1}{4}x^4$ 248) $y = \frac{1}{5}x^5$

Scrivi la funzione primitiva:

249) $y' = 3x^2$ 250) $y' = x^2$ 251) $y' = 9x^2$ 252) $y' = 4x^3$ 253) $y' = x^3$ 254) $y' = x^4$

Calcola la derivata:

255) $y = e^x$ 257) $y = e^x + 3$ 259) $y = -2e^x$ 261) $y = -e^x$ 263) $y = 2e^{3x}$ 265) $y = \frac{1}{6}e^{6x}$

256) $y = e^x - 3$ 258) $y = 4e^x$ 260) $y = e^{3x}$ 262) $y = e^{-x}$ 264) $y = 3e^{2x}$ 266) $y = e^{x+5}$

Scrivi la funzione primitiva:

267) $y' = e^x$ 269) $y' = e^x + 2$ 271) $y' = 4e^{x+2}$ 273) $y' = -3e^x$ 275) $y' = \frac{1}{2}e^{2x}$ 277) $y' = 12e^{3x}$

268) $y' = e^x + 1$ 270) $y' = 2e^x$ 272) $y' = -e^x$ 274) $y' = e^{-x}$ 276) $y' = e^{5x}$ 278) $y = -e^{-2x}$

Scrivi la derivata:

279) $y = \sin x$ 282) $y = \frac{1}{2}\sin x$ 285) $y = -\sin(3x)$ 288) $y = \frac{1}{7}\sin(7x)$ 291) $y = \cos(3x)$

280) $y = 2\sin x$ 283) $y = -4\sin x$ 286) $y = \frac{1}{9}\sin(9x)$ 289) $y = \cos x$ 292) $y = 2\cos(2x)$

281) $y = -\frac{7}{2}\sin x$ 284) $y = \sin(2x)$ 287) $y = 2\sin(5x)$ 290) $y = 2\cos x$ 293) $y = \frac{1}{11}\cos(11x)$

Scrivi la funzione primitiva:

294) $y' = \cos x$ 296) $y = -3\cos x$ 298) $y = \cos(5x)$ 300) $y' = -2\sin x$ 302) $y' = \sin(-x)$

295) $y' = 2\cos x$ 297) $y = -\cos x$ 299) $y' = -\sin x$ 301) $y' = \sin x$ 303) $y = 4\cos(-x)$

Scrivi la derivata:

304) $y = \ln x$

305) $y = \ln x - 3$

306) $y = \ln(-x)$

307) $y = \ln(-x) + 5$

308) $y = \ln(x+1)$

309) $y = \ln(x-2)$

310) $y = \ln(2x+3)$

311) $y = \ln(x-8)$

312) $y = \ln(8-x)$

313) $y = \ln(2x-7)$

314) $y = \ln 2x - 7$

315) $y = \ln(x^2 + x)$

316) $y = \ln(x^2 - 2)$

317) $y = x + \ln x$

318) $y = x + \ln(x+1)$

319) $y = 3x + \ln(x+2)$

320) $y = 5 \ln x$

321) $y = -\ln x$

322) $y = 2x - 4 \ln x$

323) $y = x + 2 \ln x$

Scrivi la funzione iniziale:

324) $y' = \frac{1}{x}$

325) $y' = \frac{3}{x}$

326) $y' = -\frac{1}{x}$

327) $y' = \frac{1}{2x}$

328) $y' = \frac{2}{3x}$

329) $y' = \frac{8}{x}$

330) $y' = \frac{1}{x+3}$

331) $y' = \frac{4}{x-1}$

332) $y' = \frac{2}{2x+3}$

333) $y' = \frac{5}{5x-1}$

334) $y' = \frac{4}{2x+1}$

335) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$

336) $y = \frac{2x-5}{x^2-5x+3}$

337) $y = \frac{4x+2}{2x^2+2x}$

338) $y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

339) $y = \frac{x+1}{x}$

340) $y = \frac{x+2}{x}$

341) $y = \frac{3x-5}{x}$

342) $y = \frac{3x-5}{x+1}$

343) $y = \frac{4x-3}{x-1}$

Scrivi la funzione iniziale:

344) $y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

345) $y' = 8x^7 - 7x^6 + 8x^3 - 6x^2 - \cos \pi$

346) $y' = x^3 + x^2 + x + 1$

347) $y' = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + e^5$

348) $y' = \frac{1}{x} + e^x + \cos x + \sin x$

349) $y' = \frac{2}{x} + 3e^x + 4\cos x + 5 \sin x$

350) $y' = x^2 - 5e^x + \frac{5}{x}$

351) $y' = \frac{7}{x} + 2e^{2x}$

352) $y' = -\frac{5}{x} + 3e^x - 2\cos x - 3 \sin x$

353) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

354) $y = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+1}$

355) $y = 4\, e^{4x} + 3e^{3x} + 2e^{2x} + 5e^x$

356) $y' = x^4 - 5x^2 + 4$

357) $y' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

358) $y' = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

359) $y' = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5x$

360) $y' = \frac{x^2+1}{x}$

361) $y' = \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{x}$

362) $y' = \frac{5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2}$

363) $y' = \frac{2x^3 - 3x + 5}{x^3}$

364) $y' = 6\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

365) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$

366) $y = 3\cos x - 2 \sin x$

Calcola questi integrali:

367) $\int_{-1}^{1} \left(-2x^4 + \frac{3}{2}x^3 + 5\right) dx$

368) $\int_{1}^{2} \left(5e^x - \frac{e^x}{5}\right) dx$

369) $\int_{-2}^{2} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x\right) dx$

370) $\int_{1}^{10} \frac{4}{x} dx$

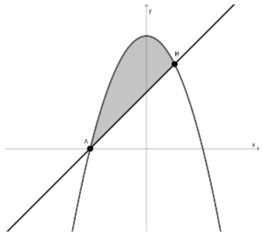
371) $\int_{0}^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$

372) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (3 \sin x - 4\cos x)\, dx$

373) $\int_{-4}^{-3} \frac{5}{x} dx$

374) $\int_{1}^{2} \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-5}\right) dx$

375) $\int_{2}^{1} 3e^{2x}\, dx$



376) Trova l'area della parte tra la parabola $y = x^2 - 5x + 3$ e l'asse x.

377) Trova l'area della parte scura compresa tra la parabola $y = -x^2 + 4$ e la retta $y = x + 2$ del disegno a destra.

Calcola questi integrali:

378) $\int_{1}^{2} \frac{1}{3x} dx$

379) $\int_{2}^{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) dx$

380) $\int_{2}^{3} \frac{4x^3 - 3x^2 + 5x - 1}{x} dx$

381) $\int_{0}^{2} \frac{x^2 + 5x + 7}{x+1} dx$

382) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x^2 - 3x + 3}{x-2} dx$

383) $\int (\ln x)'\, dx$

384) $\int (x \ln x - x)'\, dx$

385) $\int \ln x\ dx$

386) $\int \frac{x^2}{x+1}\ dx$

387) Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y = x^2 - a^2$ e dall'asse x è uguale a 36.

Calcola questi integrali:

388) $\int x \sin x\, dx$

389) $\int (x - 2) \cos x\, dx$

390) $\int \ln(x + 1)\, dx$

391) $\int \ln(x - 3)\, dx$

392) $\int (x + 3) \ln(x - 3)\, dx$

393) $\int x^2 e^x dx$

394) $\int \sin x\ e^x dx$

395) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

396) $\int \ln(2x)\, dx$

Trova la funzione primitiva di queste funzioni:

397) $y = e^{2x} + 2e^{3x} + 3e^{4x} + 4e^{5x}$

398) $y = \cos(2x) + 3\cos(3x) + 8\cos(4x) + 10\cos(5x)$

399) $y = \sin(2x) - \sin(3x) + \sin(4x) - \sin(5x)$

400) $y = \frac{8x^2}{2x-1}$

401) $y = \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 7}$

402) $y = 3x \ln x$

403) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

404) $y = \frac{10 \ln x}{x}$

405) $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

Calcola questi integrali:

381) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$

382) $\int_{0}^{1} (x - 3)^5 dx$

383) $\int_{-1}^{0} (2x - 3)^5 dx$

384) $\int_{0}^{1} (x - 1)e^x\, dx$

385) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2 + x}{x-1}\, dx$

386) $\int_{1}^{2} x \ln x\ dx$

387) Si determini un valore di a nell'insieme di funzioni $f(x) = x^3 - ax^2$ in modo che l'area finita compresa tra la curva e l'asse delle ascisse sia uguale a 2.

388) Calcolare l'area compresa tra il grafico della curva di equazione $f(x) = 4x^2 - 1$ e la retta di equazione $y = 2x + 1$.

389) Trova a in modo che l'integrale $\int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2x + a) dx = 0$.

390) Trova a in modo che l'integrale $\int_{-a}^{a} (x^2 - a^2)\, dx = -\frac{9}{2}$.

391) Trovare la funzione primitiva di $f(x) = 4x^2 - \cos x + 4e^x$ che passa per il punto $P[0; -5]$.

Calcola i seguenti integrali:

392) $\int (e^{5x} + e^{-x})dx$

393) $\int (\cos(4x) - \cos(2x))dx$

394) $\int (\sin(3x) - \sin(5x))dx$

395) $\int 4\sin x \cos^3 x\, dx$

396) $\int 3\cos x \sin^5 x\, dx$

397) $\int 12x(x^2 - 4)^5 dx$

398) $\int \frac{4\ln x}{x} dx$

399) $\int x\, e^{-x} dx$

400) $\int \sqrt{x} dx$

401) $\int x\sqrt{x^2 - 4} dx$

402) $\int \frac{4x^2-4}{2x+1} dx$

403) $\int \frac{4x^2-2x+4}{x^2+1} dx$

404) $\int \frac{x^2+2x+2}{x^2+1} dx$

405) $\int \frac{4x^2-4}{2x+1} dx$

406) $\int \frac{4x^2-2x+4}{x^2+1} dx$

407) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

408) $\int \frac{1}{4x^2-4x+1} dx$

409) $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

410) $\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx$

411) Trova l'area della parte di piano tra la funzione $y = x^2 - 9$ e la retta $y = x - 3$.

412) Trova l'area della parte di piano finita tra la funzione $y = (x-2)e^x$ e gli assi.

413) Trova l'area della parte di piano tra la funzione $y = \frac{x^2-5x+8}{x-1}$ e la retta $y = 2$.

414) Trova l'area della parte di piano tra la funzione $y = \frac{x^2+x+2}{x}$, le due rette $x = 1$ e $x = 2$ e l'asse x.

415) Trova a in modo che l'integrale $\int_1^e a\ln x\ \ dx = 5$.

416) Abbiamo le due funzioni $g(x) = \frac{1}{x+a}$ e $h(x) = \frac{1}{x-3}$.

a) Si trovi a in modo che $g(1) = -h(1)$;
b) Si studi e tracci la funzione $f(x) = g(x) - h(x)$ in tutte le sue parti;
c) Si trovi l'area della parte finita di piano formata dalla funzione, dall'asse delle y e dalla retta $y = x$.

417) La funzione $y = \frac{x^2+2x+a}{2x-1}$ ha un massimo in $x = -1$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto di massimo. Trova l'integrale della funzione.

418) La funzione $y = \frac{x^2-2x+a}{x^2-2x+1}$ ha $f'(0) = 2$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x = 0$. Trova l'integrale della funzione.

419) La funzione $y = \frac{8}{x^2-ax+4}$ ha $f'(0) = 1$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x = 0$. Trova l'integrale della funzione.

420) La funzione $y = axe^{2x}$ ha $f'(0) = 6$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x = -1$. Trova l'integrale della funzione.

421) La funzione $y = \frac{2x-a}{x^3}$ ha un massimo in $x = \frac{3}{4}$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto di massimo. Trova l'integrale della funzione.

422) La funzione $y = \int_a^x \frac{2t-4}{t^2-4t+5} dt$ passa per il punto $A(2;0)$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto A.

423) La funzione $y = \int_a^x \frac{\ln t}{t} dt$ passa per il punto $A(1;0)$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione nel punto A.

424) La funzione $y = \ln(x-a) + \ln(8-x)$ ha $f'(5) = 0$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione in $x = 5$. Trova l'integrale della funzione.

425) La funzione $y=\int_a^x \ln t\,dt$ passa per il punto $A(e;0)$. Trova a e disegna la funzione. Trova la retta tangente alla funzione quando $x=1$.

Calcola i seguenti integrali:

426) $\int_1^2 \frac{4\ln x}{x}dx$

427) $\int_{-2}^0 (x\,e^x)\,dx$

428) $\int_{-2}^0 (2x\,e^{-2x})\,dx$

429) $\int(\cos(2x)\sin(2x))dx$

430) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx$

431) $\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}dx$

432) $\int_0^x \frac{3}{t^2+2t+2}dt$

433) $\int_{-1}^0 \left(4xe^{x^2}\right)dx$

434) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$

435) Disegnare il grafico della funzione $y=x$ nell'intervallo $0\le x\le 1$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x. Disegnare il solido.

436) Disegnare il grafico della funzione $y=3x+1$ nell'intervallo $0\le x\le 1$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x. Disegnare il solido.

437) Disegnare il grafico della funzione $y=e^x$ nell'intervallo $0\le x\le 1$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x. Disegnare il solido.

438) Disegnare il grafico della funzione $y=x^2+1$ nell'intervallo $1\le x\le 3$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nell'intervallo dato rispetto all'asse x. Disegnare il solido.

439) Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y=x^2-a^2$ e dall'asse x è uguale a 36.

440) Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y=x^2-a^2$ e dall'asse x è uguale a $\frac{4}{3}$.

441) Dimostra che l'area della parte di piano tra la funzione $y=\frac{9x-9}{x^3}$, l'asse x e la retta $x=3$ è uguale a 2.

442) Trova l'area della parte finita di piano limitata dalla funzione $y=\frac{x^2+3}{x+1}$ e la retta $y=3$.

443) Calcola l'area della parte di piano tra la funzione $y=x^2+1$ e la funzione $y=x^2$ nell'intervallo $[-1;1]$.

444) Studia la funzione $y=\frac{10x-10}{x^3}$ e trova l'area tra 1 e 10.

Calcola i seguenti integrali:

445) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x=$

446) $\int \frac{x^2-5x+7}{3}\mathrm{d}x=$

447) $\int(x+a)\mathrm{d}x=$

448) $\int(x+a)\mathrm{d}a=$

449) $\int(\sin x+2)\cos x\,\mathrm{d}x=$

450) $\int 3x^2\ln x\,\mathrm{d}x=$

451) $\int \frac{2}{x^2-4x+8}\mathrm{d}x=$

452) $\int e^{-x+2}\,\mathrm{d}x=$

453) $\int \frac{4}{4x^2-1}\mathrm{d}x=$

454) $\int \frac{x^2+3}{x-2}\mathrm{d}x=$

455) $\int \frac{x^2-3x}{x+5}\mathrm{d}x=$

456) $\int \frac{2x-1}{x^2-x}\mathrm{d}x=$

457) $\int(-x-2)e^{2x}\mathrm{d}x=$

458) $\int \frac{2x+4}{2x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x=$

459) $\int \frac{\ln 2x}{x}\mathrm{d}x=$

460) $\int \arctan x \, dx =$

461) $\int \frac{x^2+\ln x}{x} dx =$

462) $\int \frac{2x-1}{x^3} dx =$

463) $\int \sin x \cos x \, dx =$

464) $\int (2x-5)^4 dx =$

465) * $\int \frac{2x+3}{(x-1)^3} dx =$

466) * $\int (e^x+1)^3 dx =$

467) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$

468) * $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1} dx =$

469) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos x+2} dx =$

470) $\int_1^2 x \sin x \, dx =$

471) $\int \ln(x-5) \, dx =$

472) $\int (\ln^2 x + 4\ln x) dx =$

473) * $\int (x-2)e^{-x} dx =$

474) $\int \left(\sin x - \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{1+x^2}\right) dx =$

475) $\int \frac{8}{4-x^2} \, dx =$

476) $\int \frac{\cos x}{\sin x+1} \, dx =$

477) $\int \frac{x^2+x}{2x+1} \, dx =$

478) $\int \frac{2x-3}{x^2-x-2} \, dx =$

479) $\int (x+3) \sin x \, dx =$

480) $\int \sin x \, e^x \, dx =$

481) $\int (x-3)^4 dx =$

482) $\int (3\cos^2 x + 2) \sin x \, dx =$

483) $\int \frac{6}{x^2-6x+25} dx$

484) $\int_0^{2\pi} \cos x \, e^x \, dx$

485) $\int_0^{2\pi} \cos x \, (\sin x - 3) \, dx$

486) $\int \left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^3 + 4x\right) dx =$

487) $\int \ln^2 x \, dx =$

488) $\int \pi(3x^2-6x) \, dx =$

489) $\int (\cos 2x - e^{4x}) dx =$

490) $\int \frac{x^2-3x-5}{2x-3} \, dx =$

491) $\int (-x-2)e^{-x} \, dx =$

492) $\int \cos^2 x \, dx =$

493) $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx =$

494) $\int \frac{6}{x^2-6x+25} dx$

495) L'area tra la funzione $y = -x^2 + a^2$ e l'asse x è 288. Trova il valore di a.

496) Calcola il volume di rotazione della funzione $f(x) = \sqrt{-4x^2+28x-24}$

497) Trova i valori di a in modo che: $\int_{a-1}^{a+3} (3x^2-8x-4) dx = 0$

498) Trova il valore di a in modo che $\int_a^{a+1} (3x^2-6x) dx = 4$

499) Trova l'area tra $f(x) = x^3 - x^2$ e $g(x) = x^3 + 3x + 2$

500) Trovare la primitiva della funzione $y = \frac{30}{25-x^2}$ passante per il punto $P[4; 0]$.

Calcola i seguenti integrali impropri:

501) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

502) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

503) $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$

504) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

PREPARAZIONE ALLA MATURITÀ – PROBLEMI

1) Sia data la famiglia di funzioni $f_{a,b}(x) = ax^5 - bx^3 + 3x$.
   Si trovino i valori di a, b per cui la funzione abbia punti stazionari per $x = 1$ e $x = -\sqrt{3}$.
   Si studi e si disegni la funzione trovata.
   Si trovi l'area della parte delimitata dalla funzione, dall'asse x e dalla retta $y = 2$.
   Si disegni la funzione $y = |f(x)|$

2) La funzione $f_a(x) = \frac{x^2-x-6}{2x+a}$ ha un asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}x - 1$.
   Si trovi il valore di a.
   Si studi e si disegni la funzione trovata.
   Si trovi l'area della parte delimitata dalla funzione e dalla retta $y = x + 2$.
   Si trovi il punto di incontro tra gli asintoti della funzione.

3) La funzione $f_a(x) = \frac{a}{1-x^2}$ passa per il punto $A\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$.
   Trova il valore di a.
   Studia e disegna la funzione trovata.
   Trova l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = 2$.
   Trova la primitiva della funzione passante per il punto $B[2; 0]$.

4) Sia data la funzione $f(x) = (-x + a)e^{-x}$. Ha un punto stazionario in $x = -1$.
   Trova il valore di a.
   Studia e disegna la funzione trovata.
   Trova l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = 1$.
   Trova l'area della parte di piano delimitata dalla funzione e dagli assi x, y.
   Disegna la funzione $g(x) = f(-x)$

5) Sia data la funzione $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x$.
   Studia e disegna la funzione.
   Trova l'equazione della tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = e$.
   Trova la primitiva della funzione.
   Disegna la funzione $g(x) = |f(x)|$

6) Sia data la funzione $y = \sqrt{-4x^2 + 8x + 12}$.
   Studia e disegna la funzione.
   Calcola il volume di rotazione ottenuto ruotando la funzione attorno all'asse x.
   Trova le coordinate del punto P della funzione più distante dall'origine e ne calcoli la distanza.

7) Sia data la funzione $f(x) = (x^2 + 4x + 4)e^{-x}$.
   Studia e disegna la funzione.
   Trova l'area della parte finita di piano tra la funzione e gli assi.
   Trova l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = -1$.
   Disegna la funzione $g(x) = -f(-x)$.

8) Sia data la funzione $f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$.
   Studia e disegna la funzione nell'intervallo $[0; 2\pi]$.
   Trova l'area della parte finita di piano tra la funzione e gli assi.
   Disegna la funzione $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1) $\mathbf{3 \cdot 9^{2x-1} = \frac{\sqrt{3}}{27}}$ Tutto si può trasformare con la stessa base 3: $\mathbf{3^{1+4x-2} = 3^{\frac{1}{2}-3}}$ $\boxed{x = -\frac{3}{8}}$

2) $\mathbf{4^{x+1} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9}$ Si trasforma in: $4 \cdot 4^x + 2 \cdot \frac{4^x}{4} = 9$ e si sostituisce $\mathbf{4^x = t}$ $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

3) $\mathbf{8 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x}$ Esponenziali con basi diverse: si trasforma tutto in logaritmo – **calcolatrice**! $\boxed{x \cong 0{,}75}$

4) $\mathbf{8^{2x} - 3 \cdot 8^x - 4 = 0}$ Esponenziali con x e $2x$: **sostituzione** $8^x = y,\ 8^{2x} = y^2$ $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

5) $\mathbf{64^x - 3 \cdot 8^x - 4 = 0}$ Esponenziali con uno quadrato dell'altro: $64^x = 8^{2x}$ come 4) $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

6) $\mathbf{8^x - 3 - 4 \cdot 8^{-x} = 0}$ Si sostituisce $8^x = t$ e $8^{-x} = \frac{1}{t}$: $t - 3 - \frac{4}{t} = 0 \quad /\cdot t$ $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

---

1) $\mathbf{\log(3x + 7) = 0}$ $3x + 7 = 1$ $\boxed{x = -2}$

2) $\mathbf{\log(4x + 8) = 2}$ $4x + 8 = 10^2$ $\boxed{x = 23}$

3) $\mathbf{\log(7x - 12) = \log(3x + 8)}$ $7x - 12 = 3x + 8$ $\boxed{x = 5}$

4) $\mathbf{2\log(6 - 7x) = 2 + \log(x + 6)}$ $(6 - 7x)^2 = 100(x + 6)$ $x_1 = \frac{282}{49}$ $\boxed{x_2 = -2}$

5) $\mathbf{\log^2 x - \log x - 2 = 0}$ **Sostituzione** $\log x = t$ $(\log^2 x = t^2)$ $\boxed{x = 100}$ $\boxed{x = 0{,}1}$

ALCUNI CONSIGLI:

CONVIENE mettere i logaritmi a sinistra in un UNICO logaritmo

Il numero DENTRO il logaritmo non può essere negativo, ma $\boldsymbol{x}$ **può essere negativo!**

Scrivere $\mathbf{\log^2 x}$ **è diverso da** $\mathbf{\log x^2}$

VERIFICA SEMPRE LE SOLUZIONI: metti il valore di x nell'equazione iniziale

Proprietà logaritmi

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$ $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$ $\ln a^b = b\ln a$ $\ln_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

NELLE **DISEQUAZIONI**:

Cambia la direzione di $>$, $<$ se la base del logaritmo o dell'esponenziale è più piccola di 1

Si risolvono come le equazioni. Nei logaritmi attento alle condizioni: il numero dentro **DEVE ESSERE** $\mathbf{> 0}$. Esempi:

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI:

$2^{3x-5} < \frac{1}{4}$ $3x - 5 < -2$ $\boxed{\boldsymbol{x < 1}}$

$0{,}5^{3x-5} < \frac{1}{4}$ $3x - 5 > 2$ $\boxed{\boldsymbol{x > \frac{7}{2}}}$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE:

$\ln_2(x + 2) \leq 3$ $x + 2 \leq 2^3$ $x \leq 6$ e $x > -2$ $\boxed{\boldsymbol{x \in (-2; 6]}}$

$\ln_{0,5}(x + 2) \leq 3$ $x + 2 \geq 0{,}5^3$ $x \geq \frac{1}{8} - 2$ $\boxed{\boldsymbol{x > -\frac{15}{8}}}$

Esercizi su equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche per la maturità:

1)	Risolvere l'equazione $\ln(2x-9)+\ln(x-5)=\ln(2x)$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=\frac{15}{2}$
2)	Risolvere l'equazione $\ln(4x-5)-\ln(x-2)=\ln(x)$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=5$
3)	Risolvere l'equazione $\ln(x+2)+\ln(x-1)=\ln(2x)$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=2$
4)	Risolvere l'equazione $\log(x-2)+\log(x-5)=1$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=7$
5)	Risolvere l'equazione $\ln(x+3)+\ln(x-3)=0$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=\sqrt{10}$
6)	Risolvere l'equazione $e^{2x}-3e^{x}=4$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=\ln 4$
7)	Risolvere l'equazione $4^{x}-2^{x+1}=8$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=2$
8)	Risolvere l'equazione $3^{x}+3^{-x}=\frac{82}{9}$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=2$ e -2
9)	Risolvere l'equazione $2^{\log_{\frac{1}{2}} x}=\frac{1}{4}$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=4$
10)	Risolvere l'equazione $e^{x}-5\cdot e^{-x}=-4$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=0$
11)	Risolvere la disequazione $2^{x+2}+7\cdot 2^{x-1}<15$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x\in(-\infty;1)$
12)	Risolvere l'equazione $\log(x+13)-\log(x-3)=\log(x+4)$.	Soluzione $x=5$
13)	Risolvere la disequazione $63\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}<2016$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x\in(-5;+\infty)$
14)	Risolvere l'equazione $3\log^2 x-4\log x+1=0$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x=10$ e $\sqrt[3]{10}$
15)	Risolvere la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq 2$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x\in\left(1;\frac{5}{4}\right]$
16)	Risolvere la disequazione $\log_{0,5}(x-2)\geq 0$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x\in(2;3]$
17)	Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}>\frac{1}{16}$ nell'insieme dei numeri reali.	Soluzione $x\in(-2;2)$
18)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3e^{2x}=13e^{x}+10$.	Soluzione $x=\ln 5$
19)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $2\cdot 10^{x}+7\cdot 10^{-x}=15$.	Soluzione $x=\log 7$ e $\log\frac{1}{2}$
20)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-28=0$.	Soluzione $x=\frac{\log 4}{\log 3}$
21)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log_3 x+\log_3\frac{x}{3}=1-\log_{\sqrt{3}} 3$.	Soluzione $x=1$
22)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log^2 x=4\log x-3$.	Soluzione $x=10$ e 1000
23)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $2\log_2 x-\log_2\frac{x}{2}=1+\log_{\frac{1}{2}} 4$.	Soluzione $x=\frac{1}{4}$
24)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log_4 x+\log_4(x-6)=\log_2 4$.	Soluzione $x=8$
25)	Nell'insieme dei numeri reali trovare l'intervallo di validità di $\ln^2 x-4\ln x\geq 0$.	Soluzione $x\in(0;1]\cup[e^4;\infty)$
26)	Nell'insieme dei numeri reali trovare l'intervallo di validità di $(-x-2)e^{-x}\leq 0$.	Soluzione $x\in[-2;\infty)$
27)	Risolvi l'equazione $\ln^2 x-5\ln x=6$.	Soluzione $x=e^{-1}$ e e^{6}
28)	Risolvi l'equazione $\log_4 x+\log_4\frac{x}{4}=1+\log_2 4$.	Soluzione $x=16$
29)	Risolvi l'equazione $100^{x}-7\cdot 10^{x}+10=0$.	Soluzione $x=\log 5$ e $\log 2$
30)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3e^{x}-4e^{-x}=4$	Soluzione $x=\ln 2$
31)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere la disequazione $2^{x}+2^{-x}>2$	Soluzione $x\neq 0$
32)	Nell'insieme dei numeri reali risolvere la disequazione $\log x+\log(x-3)\geq 1$	Soluzione $x\in[5;+\infty)$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. Le **disequazioni** si risolvono con il disegno: il coseno è sull'asse x, il seno è sull'asse y.

2. x è un ANGOLO, invece seno, coseno, tangente sono NUMERI. Le soluzioni sono ANGOLI!

3. Le equazioni $\mathbf{\sin x} = qualcosa$ hanno di solito **DUE** soluzioni in $[0; 2\pi)$:
$\boldsymbol{x_1 = \alpha} \quad \boldsymbol{x_2 = \pi - \alpha}$ Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione

4. Le equazioni $\mathbf{\cos x} = qualcosa$ hanno di solito **DUE** soluzioni in $[0; 2\pi)$:
$\boldsymbol{x_1 = \alpha} \quad \boldsymbol{x_2 = 2\pi - \alpha}$ Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione

5. $\sin x$ e $\cos x$ hanno periodo $2k\pi$, cioè le soluzioni sono $x_1 + 2k\pi \quad x_2 + 2k\pi$

6. Le equazioni $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ hanno **UNA** soluzione in $[0; 2\pi)$.

7. Fuori da $[-1; 1]$ l'equazione con seno e coseno ha **ZERO** soluzioni: $\sin x = \sqrt{2}$, $\cos x = -2\ldots$

8. Le equazioni $\mathbf{\tan x} = qualcosa$ hanno **SEMPRE DUE** soluzioni in $[0; 2\pi)$:
$\boldsymbol{x_1 = \alpha} \quad \boldsymbol{x_2 = \pi + \alpha}$ Con la calcolatrice trovo solo la prima soluzione

9. $\tan x$ ha periodo $k\pi$, cioè le soluzioni sono $x_1 + k\pi$

FORMULE IMPORTANTI:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

$\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

Teorema dei seni:

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

oppure

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Formule area triangolo:

$Area = \frac{base \cdot altezza}{2}$

$A = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$

$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin\beta}{2}$

Esercizi su equazioni e disequazioni goniometriche. Risultati tra tutti i numeri reali:

1) Risolvere l'equazione $\sin^2 x - \cos x = 1$. Soluzioni $x = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\} + 2k\pi$

2) Risolvere l'equazione $2\sin x + \sqrt{2}\sin 2x = 0$. Soluzioni $x = \left\{0, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi\right\} + 2k\pi$

3) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin x = 1$. Soluzioni $x = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi\right\} + 2k\pi$

4) Risolvere l'equazione $\cos 4x + \sin 2x = 1$. Soluzioni $x = \left\{0, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}\right\} + k\pi$

5) Risolvere l'equazione $\cos x - \cos 2x = 0$. Soluzioni $x = \left\{0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\} + 2k\pi$

6) Risolvere l'equazione $\cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x = 0$. Soluzioni $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

7) Risolvere l'equazione $\cos^2 x - \sin x = 1$. Soluzioni $x = \left\{0, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\} + 2k\pi$

8) Risolvere l'equazione $2\cos^2 x + \cos 2x = 0$. Soluzioni $x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\} + 2k\pi$

9) Risolvere la disequazione $1 > \sqrt{2}\sin x$. Soluzioni $x \in \left(\frac{3}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi\right) + 2k\pi$

10) Risolvere la disequazione $2\cos^2 x \le 1$. Soluzioni $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right] + k\pi$

Esercizi su equazioni e disequazioni goniometriche. Tutti i risultati nell'intervallo $[0; 2\pi)$:

11) Risolvere l'equazione $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Soluzioni $x = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$

12) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin 2x = 1$. Soluzioni $x = 0, \frac{\pi}{4}, \pi$

13) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin 2x = 1$. Soluzioni $x = 0, \pi, \frac{7}{4}\pi$

14) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin x = 1$. Soluzioni $x = 0, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

15) Risolvere l'equazione $\cos 2x + \sin x = 1$. Soluzioni $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$

16) Risolvere l'equazione $3\sin x + \cos 2x = -1$. Soluzioni $x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

17) Risolvere l'equazione $\sin^2 x + \cos x = 1 + \cos x\,(\cos x + 1)$. Soluzioni $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

18) Risolvere l'equazione $\sin 2x + 1 = 0$. Soluzioni $x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

19) Risolvere la disequazione $\sin^2 x \ge \frac{3}{4}$ Soluzioni $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right]$

20) Risolvere la disequazione $\cos^2 x > \frac{3}{4}$ Soluzioni $x = \left[0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi; 2\pi\right)$

21) Risolvere l'equazione $2\cos x\sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$ Soluzioni $x = \frac{\pi}{8}; \frac{5}{8}\pi; \frac{9}{8}\pi; \frac{13}{8}\pi$

22) Risolvere l'equazione $\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 0$ Soluzioni $x = \frac{3}{8}\pi; \frac{7}{8}\pi; \frac{11}{8}\pi; \frac{15}{8}\pi$

23) Risolvere l'equazione $\cos 2x - \sin 2x = 1$ Soluzioni $x = 0; \pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi$

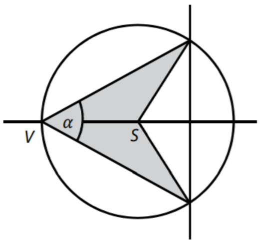
Esercizi sui triangoli. Trovare tutte le possibili soluzioni:

24) Risolvere il triangolo in cui $\alpha = \beta = 4\gamma$ e $c = 8$ cm. Soluzioni $\alpha = \beta = 80°, \gamma = 20°$ $a = b = 23{,}035$ cm $A = 90{,}74$ cm^2

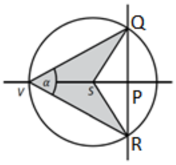
25) Risolvere il triangolo in cui $\alpha = 30°,\ a = 4,\ c = 4\sqrt{2}$ cm.
Soluzione 1: $\beta = 105°, \gamma = 45°, b = 7{,}73$ cm, $A = 10{,}93$ cm^2 Soluzione 2: $\beta = 15°, \gamma = 135°, b = 2{,}07$ cm, $A = 2{,}93$ cm^2

26) Risolvere il triangolo in cui $a = 2b = 2c = 10$ cm. Soluzione: Non ha soluzioni, non è un triangolo

27) * La circonferenza a destra ha raggio 10 cm e $\cos\alpha = 0{,}6$. Trova l'area della parte grigia.



Soluzione: SQ, SR e SV sono 10 cm, perché sono il raggio.



l'angolo QSP è α, quindi $SP = SQ \cdot \cos\alpha = 6$ cm.
PQ sarà per Pitagora $PQ = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm
RQV ha area $\frac{1}{2} VP \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128$ cm^2 QSR ha area $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 48$ cm^2
L'area grigia sarà $128 - 48 = 80$ cm^2

28) Un triangolo ha lati $a,\ \sqrt{5a},\ \sqrt{10a}$ con a numero reale, e angolo $\alpha = 45°$. Trovare la lunghezza dei lati, sapendo che a è il lato opposto ad α. Soluzione: $a = 5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 5\sqrt{2}$ cm, $\beta = 45°, \gamma = 90°$, $A = \frac{25}{2}$ cm^2

29) Trovare angoli e area di un poligono regolare di 20 lati di lunghezza 1 cm. Soluzione: $A = 31{,}57$ cm^2

30) Risolvere il triangolo in cui $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 30°$.
Soluzione 1: $c = 8$ cm, $\beta = 61°$, $\gamma = 89°$, $A = 14$ cm^2 Soluzione 2: $c = 4{,}13$ cm, $\beta = 119°, \gamma = 31°$, $A = 7{,}22$ cm^2

31) I lati di un triangolo sono $5,\ 6,\ 7$ cm. Trovare le dimensioni degli angoli e l'area.
Soluzioni: $\alpha = 44{,}4°, \beta = 57{,}1°$, $\gamma = 78{,}5°$, $A = 14{,}7$ cm^2

32) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono $A[2;5]$, $B[3;-1]$, $C[-4;1]$. Calcolare l'area del triangolo. Scrivere l'equazione vettoriale della retta AB.
Soluzioni: $a = \sqrt{53}$ $b = \sqrt{52}$ $c = \sqrt{37}$ $\alpha = 65{,}8°$ $\beta = 64{,}6°$ $\gamma = 49{,}6°$ $A = 20$ retta AB: $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

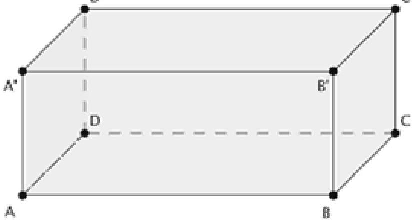
33) Un triangolo ha lati $a,\ \sqrt{2a},\ 3\sqrt{a}$ con a numero reale, e l'angolo $\alpha = 45°$. Trovare la lunghezza dei lati.
Soluzioni: $a = 5$ cm, $\beta = \sqrt{10}$ cm, $\gamma = \sqrt{45}$ cm

34) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono $A[-1;3]$, $B[3;5]$, $C[7;-3]$. Calcolare l'area del triangolo. Soluzioni: $a = \sqrt{80}, b = 10, c = \sqrt{20}, \alpha = 63{,}4°, \beta = 90°, \gamma = 26{,}6°, A = 20$

35) Un triangolo ha lati $a,\ \sqrt{2a},\ 3\sqrt{a}$ con a numero reale, e l'angolo $\alpha = 135°$. Trovare la lunghezza dei lati.
Soluzioni: $a = 17$ cm, $b = \sqrt{34}$ cm, $c = \sqrt{153}$ cm

36) Calcolare lunghezza dei lati e degli angoli di un triangolo i cui vertici sul piano cartesiano sono $A[8;15]$, $B[-3;7]$, $C[4;-3]$. Calcolare l'area del triangolo. Scrivere l'equazione esplicita della retta AC.
Soluzioni: $a = \sqrt{149}, b = \sqrt{340}, c = \sqrt{185}, \alpha = 41{,}45°, \beta = 91{,}05°, \gamma = 47{,}5°, A = 83$ retta AC: $y = \frac{9}{2}x - 21$

37) * Nel parallelepipedo in basso $|AD| = |AB| = 4$ cm, $|AA'| = 2$ cm. Trovare la distanza tra A e il segmento $B'D'$.
Soluzione: $\sqrt{12}$ cm, si disegna il triangolo $AB'D'$ in cui $|AB'| = |AD'| = \sqrt{20}$, $|B'D'| = \sqrt{32}$ e l'altezza rispetto a $B'D'$ è la soluzione.



NUMERI COMPLESSI

Il numero i ha questa caratteristica: $\boldsymbol{i^2 = -1}$ Numero complesso $\boldsymbol{z = x + iy}$

$\bar{z} = x - iy$ $\bar{z}$ **complesso coniugato** cambia il segno della parte immaginaria

Modulo $|z|$ la distanza del punto da O, si calcola con il teorema di Pitagora: $\boldsymbol{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

Argomento θ angolo con l'asse x. Si trova DISEGNANDO z e usando i triangoli rettangoli: $\cos\theta = \frac{lato\ lontano}{ipotenusa}$

Se di un numero complesso conosciamo $|z|$ e θ possiamo trovare x e y: $\boldsymbol{x = |z|\cos\theta}$ $\boldsymbol{y = |z|\sin\theta}$

FORMA ALGEBRICA: $z = x + iy$

FORMA TRIGONOMETRICA: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Prodotto trigonometrico: $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))}$

Divisione trigonometrica: $\boldsymbol{z_1 \div z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))}$

Potenze trigonometriche: $\boldsymbol{z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$ Ad esempio $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6 = 64\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

Regole utili con il modulo: $\boldsymbol{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\boldsymbol{|z^n| = |z|^n}$

Equazione $\boldsymbol{z^n = w}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{z_k = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta_w}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_w}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)}$, con $k = 0, 1, \dots, n-1$

Esercizi sui numeri complessi:

1) Trovare il modulo del numero complesso $\frac{(1+2i)^7}{(2-i)^5}$. Soluzione: 5

2) Trovare il modulo del numero complesso $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^8$. Soluzione: 256

3) Trovare tutti i numeri complessi la cui potenza seconda è uguale alla unità immaginaria i. Riportare le soluzioni nel piano di Gauss. Soluzione: $z_1 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ $z_2 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

4) Dimostrare che per ogni numero reale m rappresenta la espressione $\frac{m+i}{m-i}$ l'unità complessa.

5) Esprimere il numero complesso $z = \log_{\frac{1}{3}} 9 + i \log_{\frac{1}{5}} 25$ in forma trigonometrica. Disegnarlo sul piano di Gauss.

Soluzione: $z = -2 - 2i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

6) Risolvere nel campo complesso l'equazione: $z^4 + 1 = 0$ e rappresentare le soluzioni nella circonferenza con centro nell'origine del piano di Gauss. Soluzione: $z_{1,2,3,4} = \frac{\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$

7) Risolvere l'equazione e rappresentare graficamente le soluzioni: $z^3 = 1 + i$.

Soluzione: $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

8) Dato il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$ calcolare il valore di z^6. Soluzione: $z^6 = -64$

9) Calcolare la parte immaginaria del numero $z = \left(\frac{1-3i}{i}\right)^8$. Soluzione: $y = 5376$

10) Calcolare la parte reale del numero $(1-i)^8$. Soluzione: $x = 16$

11) Nell'insieme dei numeri complessi risolvere l'equazione $z^4 = (2i)^2$. Soluzione: $z_{1,2,3,4} = \pm 1 \pm i$

12) Rappresenta sul piano di Gauss tutti i punti per cui $|z| = |-3i|$.

13) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z| = 4$.

14) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z + 2 - i| = 3$.

15) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $z - \bar{z} = 4i$.

16) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z - 4 + 3i| = 2$.

17) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z - 4i| = |4i|$.

18) Disegna sul piano di Gauss tutti i punti per cui $|z + 5i| + |5i| = 8$.

19) Trova la parte reale del numero complesso $z = \frac{(\sqrt{3}-1)^8}{(2+2i)^4}$

20) Il modulo del numero complesso $z = 2a + 4 + (a+1)\,i$ è uguale a 13. Trovare tutti i possibili valori di a.

Soluzione: $a_1 = 4$ $a_2 = -\frac{38}{5}$

21) Risolvi l'equazione $(z^3 + i)(z^3 - i) = 0$. Soluzione: $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4,5,6} = \frac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$

22) * Rappresenta sul piano di Gauss tutti i punti per cui $z + \bar{z} = -2$

23) * Quali di questi numeri non è un numero reale?

A) $(2+i)(2-i)$ B) $\pi \cdot i^{16}$ C) $\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^2$ D) $\left(\frac{1}{i-1}\right)^2$ E) $i + \frac{1}{i}$

24) * La distanza sul piano di Gauss tra i numeri $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - ib$ è 8. Sia a che b sono numeri positivi. Inoltre $|z| = 8$, Trova il valore di z. Soluzione: $z = \sqrt{48} + 4i$

25) * La distanza tra z_1 e z_2 è 10. In più $z_1 = -2$ e $z_2 = 2 + bi$. Quale delle seguenti espressioni è vera?

A) $2 + bi = 8$ B) $|4 + bi| = 10$ C) $|4 + b| = 10$ D) $|4 - b| = 10$ E) $\sqrt{4 + b^2} = 8$

CALCOLO COMBINATORIO, PROBABILITÀ, STATISTICA

Operazione **FATTORIALE**: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $\qquad 0! = 1 \qquad 1! = 1$

<u>Unica regola possibile</u> è semplificare la divisione: $\frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5$

ANAGRAMMI: SOLE ha $4! = \mathbf{24}$ anagrammi MATEMATICA ha $\frac{10!}{2!2!3!} = \mathbf{151.200}$ anagrammi

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE: $\frac{n!}{(n-k)!}$ Scelgo $\boldsymbol{k}$ **elementi** di un gruppo **di** $\boldsymbol{n}$ elementi. L'**ordine** di scelta **cambia il risultato**. Scelgo ogni elemento **solo una volta**.

PERMUTAZIONI: $n!$ Come le **variazioni**, quando $\boldsymbol{k = n}$, cioè uso tutti gli elementi

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE: n^k Scelgo $\boldsymbol{k}$ **elementi** di un gruppo **di** $\boldsymbol{n}$ elementi. L'**ordine** di scelta **cambia il risultato**. Posso scegliere un elemento **più volte**.

COMBINAZIONI: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Scelgo $\boldsymbol{k}$ **elementi** di un gruppo **di** $\boldsymbol{n}$ elementi. L'**ordine** di scelta **non cambia il risultato**. Scelgo ogni elemento **solo una volta**.

Giuste domande:

Posso trasformare l'esercizio in un esercizio che già conosco? Quanti elementi devo scegliere? (k)
Fra quanti elementi devo scegliere? (n) L'ordine è importante? C'è ripetizione o no?

TRIANGOLO DI PASCAL:

Ad esempio $(A+B)^5 = A^5 + \mathbf{5}A^4B + \mathbf{10}A^3B^2 + \mathbf{10}A^2B^3 + \mathbf{5}AB^4 + B^5$

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

Se i casi sono **ugualmente possibili**, la probabilità di un evento è $\boldsymbol{p(E)} = \frac{\boldsymbol{casi\ favorevoli}}{\boldsymbol{casi\ possibili}}$ $\qquad \boldsymbol{0 \le p \le 1}$

$\boxed{\cup = unione\ "o"}$ e $\boxed{\cap = intersezione\ "e"}$ avremo $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$ $\qquad \boldsymbol{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$

<u>Se</u> gli eventi sono **<u>indipendenti</u>**: $p(A\ e\ B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Probabilità CONDIZIONATA $\boldsymbol{p(A|B)} = \frac{\boldsymbol{p(A \cap B)}}{\boldsymbol{p(B)}}$ (legge di Bayes)

$\boldsymbol{p(A|B)}$ **è la probabilità che si verifica A, se già so che si è verificato B**

Media aritmetica $\bar{\boldsymbol{x}}$ $\qquad \bar{x} = \frac{\sum_1^n x_n}{n}$

Scarto quadratico medio o **deviazione standard**: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ $\qquad \sigma = \sqrt{\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}$

Esercizi su calcolo combinatorio, probabilità, statistica:

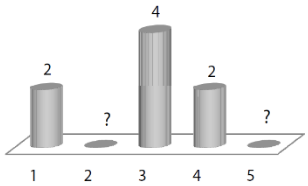
1) Calcolare le probabilità che lanciando 10 volte una moneta si verifichino gli eventi E_1: almeno una volta esce testa; E_2: esce sempre croce. Soluzione: $p(E_1) = \frac{10}{1024}$ $p(E_2) = \frac{1}{1024}$

2) Risolvere l'equazione $\binom{k}{2} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{0} = 5k - 10$. Soluzione: $k_1 = 4$ $k_2 = 5$

3) Lancio due dadi. Trova la probabilità che la somma dei due dadi:
   a) sia 8 Soluzione: $\frac{5}{36}$
   b) sia al massimo 8 Soluzione: $\frac{13}{18}$
   c) sia almeno 8 Soluzione: $\frac{15}{36}$
   d) sia meno di 8 Soluzione: $\frac{21}{36}$
   e) sia più di 8 Soluzione: $\frac{5}{18}$
   f) sia maggiore di 8 Soluzione: $\frac{5}{18}$
   g) sia maggiore di 8 o minore di 5 Soluzione: $\frac{4}{9}$
   h) sia maggiore di 8 e minore di 5 Soluzione: $\frac{0}{36}$
   i) sia almeno 8 o minore di 10 Soluzione: $\frac{36}{36}$
   j) sia almeno 8 e minore di 10 Soluzione: $\frac{1}{4}$
   k) * sia almeno 8, se è minore di 10 Soluzione: $\frac{3}{10}$
   l) * sia minore di 10, se è almeno 8 Soluzione: $\frac{3}{5}$

4) Devo distribuire 10 caramelle a 4 studenti. In quanti modi posso distribuirle:
   a) se ogni studente può ricevere da 0 a 10 caramelle Soluzione: 286
   b) se ogni studente deve ricevere almeno una caramella. Soluzione: 84

5) Ad un concorso si possono ottenere 0, 1, 2, 3 oppure 4 punti. Tra i partecipanti, nessuno ha ottenuto 3 punti, cento hanno ottenuto 0 punti, centocinquanta hanno ottenuto 2 punti. Considerando che la mediana e la media sono uguali a 1,5 punti, calcolare il numero dei partecipanti al concorso. Soluzione: 100



6) 13 studenti hanno scritto un test di matematica. I risultati sono a destra, non si conosce il numero degli studenti che ha preso 2 e 5. La mediana è 2. Trova la media dei voti. Soluzione: 2,46

7) Un'urna contiene tre palline bianche e quattro nere. Si estraggono due palline (una alla volta senza rimetterle nell'urna).
   a: Calcolare la probabilità di estrarre due palline bianche Soluzione: $\frac{1}{7}$
   b: Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca. Soluzione: $\frac{5}{7}$

8) Due urne A e B hanno la seguente composizione:
   A: due palline bianche e tre nere B: una pallina bianca e due nere
   Si sceglie l'urna in base all'esito del lancio di un dado: se esce un numero esattamente divisibile per tre si sceglie l'urna A altrimenti la B.
   a. Calcolare la probabilità che estraendo una pallina questa sia bianca Soluzione: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{45}$
   b. Se è estratta una pallina bianca, calcola la probabilità che venga da A. Soluzione: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \div \frac{16}{45} = \frac{3}{8}$

9) In un sacchetto sono contenute n palline: 6 rosse, le altre blu. Determina i valori di n per i quali la probabilità che, estratte due palline insieme, esse siano dello stesso colore, valga 0,5. Soluzione: $n_1 = 16$ $n_2 = 9$

10) Sapendo che per uno studente la probabilità di essere miope è del 20%, quella di essere mancino è dell'8%, e che le due condizioni sono indipendenti, calcolare la probabilità che uno studente non miope sia mancino. Calcolare inoltre la probabilità che uno studente non sia né miope né mancino. Soluzione: $p_1 = 8\%$ $p_2 = 73{,}6\%$

11) Calcolare il numero minimo di lanci di una moneta che si devono fare per avere una probabilità del 99% di avere almeno 1 testa. Soluzione: 10 lanci $p = \frac{1023}{1024}$

12) Tra i numeri naturali risolvere l'equazione $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} - 2 = \frac{n!}{(n-1)!}$. Soluzione: $n = 4$

13) Scrivere lo sviluppo di $(A-B)^6$. Soluzione: $A^6 - 6A^5B + 15A^4B^2 - 20A^3B^3 + 15A^2B^4 - 6AB^5 + B^6$

14) I litri di benzina verde venduti quotidianamente da un distributore nell'arco di una settimana sono: $1500, 1600, 1550, 1400, 1300, 1550, 200$. Calcolare la quantità media di litri venduta quotidianamente e la deviazione standard. Soluzione: media 1300 $\sigma = 459$

15) Una classe è formata da 23 alunni: 15 ragazze e 8 ragazzi. Si deve formare un gruppo di 5 alunni, di cui 3 ragazze e 2 ragazzi. Quanti sono i possibili gruppi? Soluzione: 12 740

16) Calcolare la probabilità che mescolando e riordinando a caso quattro biglietti ognuno con una delle cifre 0, 1, 2 e 7 si ottenga il numero 2017. Soluzione: $\frac{1}{24}$

17) Lanciando due dadi calcolare la probabilità che la somma non superi 10. Soluzione: $\frac{11}{12}$

18) Risolvere l'equazione $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \binom{n}{n-2} = 10n - 3$. Soluzione: 6

19) In un'urna ci sono 7 palline rosse e 2 bianche.
Qual è la probabilità di estrarre due palline di colore diverso? Soluzione: $\frac{7}{18}$
Estraggo una pallina e la nascondo. Poi estraggo una pallina, ed è bianca. Qual è la probabilità che la prima pallina sia rossa? Soluzione: $\frac{7}{8}$

20) Lancio 9 volte una moneta, calcola la probabilità che:
a) testa esca 3 volte; Soluzione: $\frac{84}{512}$
b) che testa esca più di croce. Soluzione: $\frac{1}{2}$

21) Lanciando due dadi, calcola la probabilità:
a) che la somma sia più di 5 e almeno uno dei due dadi sia un 4; Soluzione: $\frac{1}{4}$
b) che la somma sia più di 5 o almeno uno dei due dadi sia un 4; Soluzione: $\frac{7}{9}$
c) che la somma sia più di 5 se almeno uno dei due dadi è un 4. Soluzione: $\frac{7}{9}$

22) * Un numero palindromo è un numero che si legge uguale da sinistra a destra o da destra a sinistra (ad esempio 5297925). Trova quanti sono tutti i palindromi di 5 cifre in cui la prima cifra è più grande della seconda.
Soluzione: 450

23) * Trova il valore dell'elemento senza x dello sviluppo di $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{15}$. Soluzione: $\binom{15}{10} = 3003$

24) * In un'urna ci sono 5 palline verdi e 3 blu. Vengono estratte 5 palline, ogni pallina estratta non viene rimessa nell'urna. Qual è la probabilità di estrarre 2 palline blu? Soluzione: $\frac{30}{56}$

25) * In un albergo ci sono 10 ospiti. 2 parlano ceco e italiano, 3 parlano solo ceco, 1 parla solo italiano, gli altri non parlano né ceco né italiano. Qual è la probabilità che due ospiti scelti a caso parlino tra loro italiano o ceco?
Soluzione: $\frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

VETTORI IN DUE DIMENSIONI

Distanza tra due punti $A[x_1; y_1]$ e $B[x_2; y_2]$: con **Pitagora** $|AB| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}$

Vettore **tra due punti** $A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $B\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$: $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_2 - x_1} \\ \boldsymbol{y_2 - y_1} \end{bmatrix}$

Lunghezza vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $|\boldsymbol{\vec{v}}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Angolo $\boldsymbol{\theta}$ vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: si calcola guardando DISEGNANDO il vettore e usando i triangoli rettangoli $\cos\theta = \frac{lato\ lontano}{ipotenusa}$

Prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{u}$: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \boldsymbol{ac + bd}$ oppure $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = |u| \cdot |v| \cdot \cos\varphi}$ (φ è l'angolo tra i vettori)

Angolo tra vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$: $\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u| \cdot |v|}}$ $\boldsymbol{cos\varphi = 0}$ vettori perpendicolari $\boldsymbol{\cos\varphi = \pm 1}$ paralleli

---

RETTE IN DUE DIMENSIONI

Equazione **esplicita** della retta: $\boldsymbol{y = kx + q}$

Equazione **generale** della retta: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

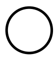
Equazione **vettoriale** retta: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y_0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v_x} \\ \boldsymbol{v_y} \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = x_0 + t\ v_x \\ y = y_0 + t\ v_y \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ punto iniziale $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ vettore spostamento

Se le $m_1 = m_2$ due rette sono **parallele** se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ due rette sono **perpendicolari**

Retta per due punti $A[x_1; y_1]$ e $B[x_2; y_2]$: $\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$ oppure $\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Distanza tra la retta r: $ax + by + c = 0$ e il punto $P[x_0; y_0]$: $\boldsymbol{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

CONICHE

CIRCONFERENZA $\boldsymbol{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2}$ **oppure** $\boldsymbol{x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0}$ 

Centro e raggio $C(x_c; y_c)$ r $\alpha = -2x_C$ $\beta = -2y_C$ $\gamma = x_C^2 + y_C^2 - r^2$

ELLISSE $\boldsymbol{\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1}$  

Se $a > b$:  $c^2 = a^2 - b^2$ $F_1[x_c - c; y_c]$ $F_2[x_c + c; 0]$

Se $a < b$:  $c^2 = b^2 - a^2$ $F_1[0; y_c - c]$ $F_2[0; y_c + c]$ Area dell'ellisse $A = \pi ab$

IPERBOLE  

Equazione, fuochi e vertici se:  $\boldsymbol{\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1}$ $V_1[x_c; -b]$ $V_2[x_c; b]$ $F_1[x_c; y_c - c]$ $F_2[x_c; y_c + c]$

Equazione, fuochi e vertici se:  $\boldsymbol{\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = -1}$ $V_1[-a; 0]$ $V_2[a; 0]$ $F_1[x_c - c; y_c]$ $F_2[x_c + c; y_c]$

Asintoti: $y - y_c = \frac{b}{a}(x - x_c)$ $y - y_c = -\frac{b}{a}(x - x_c)$

Esercizi su vettori, rette e coniche per la maturità:

1) Stabilire se le due rette s: $y = 3x - 5$ e t: $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono perpendicolari.

2) Stabilire se le due rette s: $y = -\frac{2}{3}x + 1$ e t: $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono perpendicolari.

3) Trovare l'equazione vettoriale, esplicita, generale della retta che passa per i punti $A[13; -12]$ e $B[-5; 6]$.
Soluzione: $y = -x + 1$ oppure $x + y - 1 = 0$ oppure $X = \begin{bmatrix} 13 \\ -12 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(1, -2)$, tangente alla retta t: $x + 2y - 7 = 0$.
Soluzione: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$

5) Trovare l'equazione della retta passante per il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ e perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ r \end{pmatrix}$ dove r è il raggio. Soluzione: $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

6) Disegnare le circonferenze tangenti agli assi x e y e con il centro sulla retta $y = 2x - 3$. Scrivere l'equazione delle circonferenze. Soluzione: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

7) Disegnare la circonferenza che passa per i punti $A[-3; 2], B[1; 2], C[1; 4]$.

8) Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(3; 1)$ tangente alla retta t: $y = x + 2$.
Soluzione: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$

9) Trovare l'equazione della retta tangente nel punto $P(5; 4)$ alla circonferenza con centro $C(1; 1)$.
Soluzione: $4x + 3y - 32 = 0$

10) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.

11) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $x^2 - y^2 = -1$. Disegnare gli eventuali fuochi.

12) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.

13) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $4x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.

14) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$. Disegnare gli eventuali fuochi.

15) Rappresentare sul piano cartesiano l'equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$. Disegnare gli eventuali fuochi.

16) Scrivere l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, fuoco in $F_1[1; 0]$ e vertice in $A[-3; 0]$.
Soluzione: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

17) Decidere il tipo della conica $5x^2 + y^2 = 10x$. Disegnare la conica nel sistema cartesiano.
Soluzione: ellisse $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$

18) Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(3, -5)$, tangente alla retta t: $x + 3y + 2 = 0$.
Soluzione: $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 10$

19) Disegnare la circonferenza che passa per i punti $A[0; 5], B[4; 3], C[3; 4]$. Soluzione: $x^2 + y^2 = 25$

20) Trovare l'equazione della retta tangente nel punto $P(5;-4)$ alla circonferenza con centro $C(1;-1)$.
Soluzione: $4x-3y-32=0$

21) Nel piano cartesiano trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, tangente all'asse x in $A[2;0]$ e passante per $B[1;1]$. Soluzione: $y=x^2-4x+4$

22) Una parabola passa per il punto $G[1;0]$ ed ha il vertice nel punto $V[4;9]$. Scriverne l'equazione e rappresentarla graficamente. Qual è l'equazione della sua simmetrica rispetto all'origine?
Soluzione: $y=-x^2+8x-7$ $y=x^2+8x+7$

23) Trovare il valore di k per cui la retta $r: y=k-x$ risulta tangente alla parabola $p: y=x^2-kx$. Disegnare la parabola per tale valore del parametro k. Soluzione: $k=-1$

24) Risolvere la disequazione $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{x}+1$. Soluzione: $x \in (-\infty;-1) \cup \left[-\frac{1}{2};0\right)$

25) Risolvere la disequazione $\frac{4}{x+1} \geq \frac{x+1}{4}+\frac{3}{2}$. Soluzione: $x \in (-\infty;-9] \cup (-1;1]$

26) Nel piano cartesiano un'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani è inscritta in un rettangolo di vertici $A[2;-3]$, $B[6;-3]$, $C[6;5]$, $D[2;5]$. Trovare l'equazione dell'ellisse e la posizione dei fuochi.
Soluzione: $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ $F_1\left(4;1+\sqrt{12}\right)$ $F_2\left(4;1-\sqrt{12}\right)$

27) Trovare l'intersezione tra le rette $X=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ e $X=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$. Trova l'angolo tra le rette.
Soluzione: $P\left[-\frac{18}{23};\frac{53}{23}\right]$ $\varphi=73{,}07°$

28) Trovare l'angolo tra le rette $y=2x+3$ e $y=-5x+7$. Soluzione: 37,87°

29) * Disegnare un'iperbole con centro nell'origine e in cui a, b, c sono i primi 3 elementi di una successione aritmetica di ragione 2. Soluzione: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=\pm 1$

30) Disegnare l'iperbole $y=\frac{1}{x+3}$ nel piano cartesiano.

31) Trova centro e raggio di $x^2+y^2-8x+6y-4=0$. Soluzione: $C[4,-3]$ $r=\sqrt{29}$

32) Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro in $[1;1]$ e $a=c=3$. Soluzione: $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{18}=1$

33) Disegna l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con $c=5$ e asintoti $y=\pm\frac{3}{4}x$. Soluzione: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

34) * Un'ellisse ha fuochi in $F_1[-3;-1]$ e $F_2[5;-1]$ e passa per il punto $A[1;-4]$. Scrivi l'equazione dell'ellisse e disegnala. Soluzione: $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

35) Scrivi l'equazione dell'ellisse inscritta nel rettangolo di vertici $[0;0], [6;0], [6;4], [0,4]$. Soluzione: $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

SUCCESSIONI E SERIE

La successione $\boldsymbol{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ è convergente verso un numero chiamato numero di **Eulero** $\boldsymbol{e = 2,71828182845904}$ ...

La successione $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ si chiama successione ricorsiva di **Fibonacci.** I primi termini: 0 1 1 2 3 5 8 13...

PROGRESSIONE ARITMETICA: è la successione $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ oppure $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + d}$

(d si chiama **ragione**) $d = \frac{a_n - a_k}{n-k}$

SERIE ARITMETICA: è la **somma** di una progressione aritmetica $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

PROGRESSIONE GEOMETRICA: è la successione $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ oppure $\boldsymbol{a_n = q \cdot a_{n-1}}$

(q si chiama **ragione**) $q = \frac{a_n}{a_n - 1}$

Se $-1 < q < 1$ **convergente a 0** $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

SERIE GEOMETRICA: è la **somma** di una progressione geometrica $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Se $-1 < q < 1$ s_n è **convergente** $\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}}$

Esercizi sulle successioni e le serie per la maturità:

1) Trovare la somma di tutti i termini di una progressione geometrica di cui sappiamo che $a_3 = \frac{9}{2}, a_4 = -\frac{3}{4}$. Scrivere i primi 5 termini della progressione. Soluzione: $s_\infty = \frac{972}{7}$ $\left\{162,\ -27,\ \frac{9}{2},\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{8} \dots\right\}$

2) Determinare tutti i termini negativi della progressione aritmetica che soddisfano le condizioni: $\begin{cases} a_3 - a_5 = -48 \\ a_2 + a_3 = 8 \end{cases}$.
Trovare la somma dei primi 1000 numeri della progressione. Soluzione: $a_1 = -32,\ a_2 = -8,\ s_{1000} = 11\,956\,000$

3) Trovare la somma di tutti i termini di una progressione geometrica di cui sappiamo che $a_3 = 6, a_4 = -3$. Scrivere i primi 5 termini della progressione. Soluzione: $s_\infty = 24$ $\left\{24,\ -12,\ 6,\ -3,\ \frac{3}{2} \dots\right\}$

4) Determinare i primi cinque termini della progressione aritmetica che soddisfano le condizioni: $\begin{cases} a_3 + a_5 = 24 \\ a_3 - a_2 = 4 \end{cases}$.
Trovare la somma dei primi 1000 numeri della progressione. Soluzione: $s_{1000} = 1\,998\,000$ $\{0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16 \dots\}$

5) In una progressione geometrica la somma di tutti gli infiniti termini è 3. Il primo termine è 2, scrivere i primi 5 termini della progressione. Soluzione: $\left\{2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{81} \dots\right\}$

6) In una progressione geometrica sappiamo che $a_4 = 24,\ \ a_5 = -12$. Scrivere i primi 5 termini della progressione. Trovare la somma di tutti gli infiniti termini. Soluzione: $\{-192, 96,\ -48, 24,\ -12\}$ $s_\infty = -128$

7) Un disegno è formato da infiniti quadrati uno accanto all'altro. Il primo quadrato a sinistra ha lato $4cm$, ogni quadrato successivo ha lato metà del lato del quadrato alla sua sinistra. Trovare l'area di tutto il disegno.

Soluzione: $A = \frac{16}{3}$ cm^2

8) a) Trovare la somma di tutti i numeri pari tra 0 e 1200. Soluzione: $s = 360\,600$
b) Quanto è la somma di tutti i numeri dispari? Soluzione: $s = 360\,000$

9) Calcola: $\lim_{n\to\infty} \frac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+\,...\,+999\,999^n}{1\,000\,000^n} =$ Soluzione: 0

10) In una successione aritmetica $\begin{cases} a_{11} - a_{14} = 15 \\ a_{500} + a_{501} = -1 \end{cases}$. Trovare il primo termine e la somma dei primi 1000 termini.

Soluzione: $d = -3$, $s_{1000} = 500$

11) Trova la somma di tutti i numeri divisibili per 9 tra 1000 e 5000. Soluzione: 1 332 666

12) Calcola la somma dei primi 1000 elementi della successione:
1000 997 994 991 … Soluzione: $-498\,500$

13) In una successione geometrica il primo termine è 9 e la somma di tutti gli infiniti termini è 10. Trova i primi 5 elementi. Soluzione: $\{9,\ 0.9,\ 0.09,\ 0.009,\ 0.0009\}$

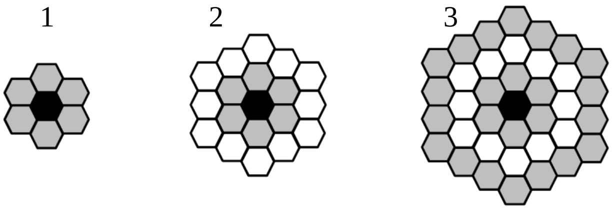
14) Calcola la somma di tutti gli infiniti elementi della seguente successione:
9 3 1 $\frac{1}{3}$ … Soluzione: $\frac{27}{2}$

15) Calcola la somma dei primi 1000 elementi della successione aritmetica in cui $\begin{cases} a_7 + a_8 = 443 \\ a_{107} + a_{108} = 243 \end{cases}$

Soluzione: $s_{1000} = -271\,500$

16) * In una successione geometrica $\begin{cases} a_1 + a_2 = 4 \\ a_3 - a_1 = -16 \end{cases}$. Trova q. Soluzione: $q = -3$

17) Ogni figura in basso è formata da mattonelle e un buco nero in centro. Quale è formata da 1 260 mattonelle?



Soluzione: la 20° figura

18) * Risolvi l'equazione $\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \,...+ \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4\,080}{2^{n+4}}$ Soluzione: $n = 8$

19) * Sono date due serie: $\begin{cases} a + a^2 + a^3 + a^4 + \,... \\ b - b^2 + b^3 - b^4 + \,... \end{cases}$
Sapendo che hanno lo stesso s_∞:
a) trova il valore di b se $a = \frac{1}{6}$ Soluzione: $b = \frac{1}{4}$
b) trova il valore di s_∞, se $b = 2a \neq 0$ Soluzione: $s_\infty = \frac{1}{3}$

20) Viene costruita una buca. Il primo metro costa 50 €, ogni metro successivo costa 20 € in più rispetto al precedente (ad esempio una buca di 4 metri costerà $50 + 70 + 90 + 110 = 320$ €).
Calcolare il costo di una buca di 120 metri. Soluzione: 148 800 €
Se il budget a disposizione è di 100 000 €, quanti metri potrà essere profonda la buca? Soluzione: 98 m

21) Qual è la cifra delle unità del numero 3^{2023}? Motiva la tua risposta. Soluzione: 7

ESERCIZI VARI

1) Trova il dominio della funzione $y = \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$.

2) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.

3) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\ln(x^2-7x+10)}{e^x-1}$.

4) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$.

5) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\tan x}{x^2-9}$.

6) Trovare il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}$.

7) Dimostrare che l'area della parte di piano tra la funzione $y = \frac{9x-9}{x^3}$, l'asse x e la retta $x = 3$ è uguale a 2.

8) Date le funzioni $f(x) = x^4 - ax^2 + b$ e sapendo che $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$, trovare a e b.

9) Trovare l'intersezione tra la funzione $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ e la retta $y = 1$.

10) Trovare l'equazione delle rette tangenti alla parabola $y = x^2 + 2x - 8$ nel punto di intersezione con l'asse x. Trovare il punto di intersezione tra le due rette.

11) Trovare l'area della parte finita di piano limitata dalla funzione $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ e la retta $y = 3$.

12) Trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$. Calcolare la distanza tra i due punti.

13) Trovare l'equazione della retta che passa per i punti stazionari della funzione $y = 2x^3 + 3x^2 + 7$.

14) Dimostra senza calcolatrice che il quadrato del numero $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ è un numero intero e calcolalo.

15) Semplificare al massimo l'espressione $\frac{\sqrt[3]{32}\ \sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2}\ \sqrt[6]{2}}$.

16) Dimostra che ogni rettangolo che ha un vertice nell'origine e il vertice opposto sulla funzione di equazione $y = \frac{4}{x}$ ha la stessa area. Calcola il valore di tale area.

17) Trova il rettangolo di area minima con un vertice nell'origine e il vertice opposto, nel primo quadrante, sulla funzione di equazione $y = \frac{x^2+3}{x^2}$. Calcola il valore di tale area.

18) Trova i due punti più vicini all'origine della funzione $y = \frac{3}{x}$. Calcola la distanza minima.

19) Trova i due punti più vicini all'origine della funzione $y = x^2 - 4$.

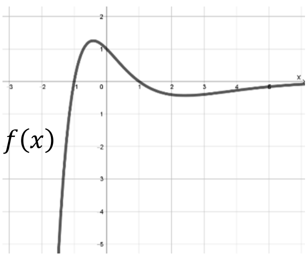
20) Trova il punto più vicino all'origine della funzione $y = \sqrt{4x^2 - 10x + 13}$. Trova il punto più vicino all'asse x della funzione, sapendo che è sempre positiva.

21) Trovare le coordinate del punto P della funzione $y = \sqrt{-2x^2 + 12x}$ più lontano dall'origine. Calcolare la distanza $|OP|$.

22) Dalla funzione $f(x)$ a destra, disegna la funzione $g(x) = -f(x)$.

23) Dalla funzione $f(x)$ a destra, disegna la funzione $g(x) = f(-x)$.

24) Dalla funzione $f(x)$ a destra, disegna la funzione $g(x) = |f(x)|$.



Riflettiamo ora su cos'è la matematica: di per sé è un sistema astratto, un'invenzione dello spirito umano, che come tale nella sua purezza non esiste. È sempre realizzato approssimativamente, ma – come tale – è un sistema intellettuale, è una grande, geniale invenzione dello spirito umano. La cosa sorprendente è che questa invenzione della nostra mente umana è veramente la chiave per comprendere la natura, che la natura è realmente strutturata in modo matematico e che la nostra matematica, inventata dal nostro spirito, è realmente lo strumento per poter lavorare con la natura, per metterla al nostro servizio, per strumentalizzarla attraverso la tecnica.

Mi sembra una cosa quasi incredibile che una invenzione dell'intelletto umano e la struttura dell'universo coincidano: la matematica inventata da noi ci dà realmente accesso alla natura dell'universo e lo rende utilizzabile per noi. Quindi la struttura intellettuale del soggetto umano e la struttura oggettiva della realtà coincidono: la ragione soggettiva e la ragione oggettivata nella natura sono identiche. Penso che questa coincidenza tra quanto noi abbiamo pensato e il come si realizza e si comporta la natura, siano un enigma ed una sfida grandi, perché vediamo che, alla fine, è "una" ragione che le collega ambedue: la nostra ragione non potrebbe scoprire quest'altra, se non vi fosse un'identica ragione a monte di ambedue.

In questo senso mi sembra proprio che la matematica ci mostri la struttura intelligente dell'universo.

(Joseph Ratzinger)