

MATURITÀ 2013

Problema 1

È data la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 3}$.

Il candidato:

- studi la funzione, tracci il grafico;
- determini l'equazione della retta passante per i punti estremanti;
- calcoli la distanza relativa tra i suddetti punti;
- stabilisca se la funzione presenta qualche simmetria, determini la simmetria nel caso della risposta affermativa;
- determini l'area della porzione del piano finita compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

Problema 2

Sono assegnate le funzioni $f(x) = (ax + b)e^x$ dove a e b sono i parametri reali.

Il candidato:

- trovi il valori dei parametri per il quale la funzione f risulta tangente alla retta di equazione $y = 2x - 1$ nel punto di ascissa 0;
- studi tale funzione f , tracci il grafico;
- trovi le equazioni della retta t tangente al grafico della funzione f nel punto d'intersezione con l'asse delle ascisse;
- trovi l'area della parte finita del piano delimitata dal grafico della funzione f e gli assi cartesiani.

Questionario

- Trovare l'equazione della retta passante per il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ perpendicolare al vettore $(2, r)$ dove r è il raggio della circonferenza.
- Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\cos(4x) + \sqrt{2} \sin(2x) = 1$.
- Calcolare il numero minimo di lanci di una moneta che si devono fare per avere una probabilità del 99% di avere almeno 1 testa.
- Nel campo dei numeri naturali risolvere l'equazione $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} - 2 = \frac{n!}{(n-1)!}$.
- Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \frac{1}{16}$.
- Dimostrare che per ogni numero reale m rappresenta la espressione $\frac{m+i}{m-i}$ l'unità complessa.
- Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)}$.
- Disegnare il grafico della funzione $y = 3 - 2x$ nel intervallo $0 \leq x \leq 1$. Calcolare il volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico della funzione nel intervallo dato rispetto al asse delle ascisse. Disegnare il solido.

MATURITÀ 2013

Problema 1

a) studi la funzione, tracci il grafico;

1. Intersezione con gli assi:

se $x = 0$ $y = -\frac{5}{3} = -1,667$

se $y = 0$ $x^2 - 5 = 0$ che ha soluzioni $x_1 = \sqrt{5}$ $x_2 = -\sqrt{5}$

2. Studio del segno:

	$-\infty$	-3	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2 - 5$		+	+	-	+
$x + 3$		-	+	+	+
y		-	+	-	+

3. Limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 5}{x + 3} = \frac{9 - 5}{0^-} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 5}{x + 3} = \frac{9 - 5}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

4. C'è un asintoto verticale quando $x = -3$

C'è anche un asintoto obliquo:

$$(x^2 - 5) \div (x + 3) = x - 3 + \frac{4}{x + 3}$$

C'è l'asintoto obliquo $y = x - 3$

5. Derivata prima, massimi e minimi.

Se $x = -5$ avremo $y = -10$

Se $x = -1$ avremo $y = -2$

$$y' = \frac{2x(x+3) - 1(x^2 - 5)}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2}$$

	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$
$x^2 + 6x + 5$		+	-	-	+
$(x + 3)^2$		+	+	+	+
y'		+	-	-	+
		↗ M	↘	↘ m	↗

6. Derivata seconda e flessi:

$$y'' = \frac{(2x+6) \cdot (x+3)^2 - 2(x+3) \cdot (x^2 + 6x + 5)}{(x+3)^4} = \frac{(2x+6) \cdot (x+3) - 2(x^2 + 6x + 5)}{(x+3)^3} = -\frac{8}{(x+3)^3}$$

La funzione non ha flessi perché $-8 \neq 0$

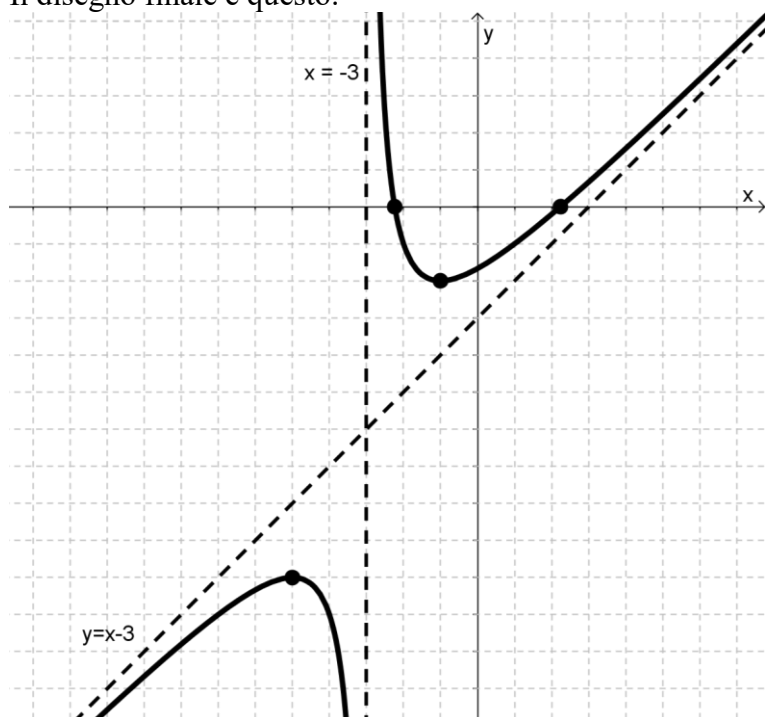
MATURITÀ 2013

Facciamo una tabella:

x	y	
0	-1,67	
$-\sqrt{5}$	0	
$\sqrt{5}$	0	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
-3^+	$+\infty$	
-3^-	$-\infty$	
-5	-10	Massimo
-1	-2	minimo

asintoti
$x = -3$
$y = x - 3$

Il disegno finale è questo:



- b) determini l'equazione della retta passante per i punti estremanti;

La retta deve passare per $(-1; -2)$ e $(-5; -10)$. Già si capisce che sarà $y = 2x$. Facciamo i calcoli per trovare $y = kx + q$

$$\begin{cases} -2 = -k + q \\ -10 = -5k + q \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 + q \\ -10 = -10 - 5q + q \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 \\ q = 0 \end{cases} \quad \text{La retta è } y = 2x$$

- c) calcoli la distanza relativa tra i suddetti punti;

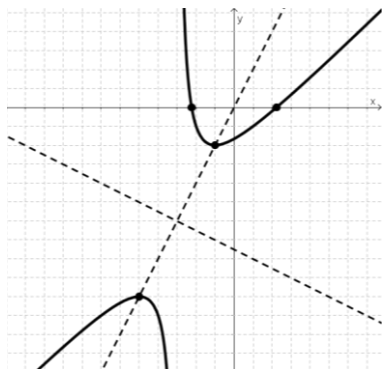
$$\text{Distanza tra due punti: } mM = \sqrt{(-1 + 5)^2 + (-2 + 10)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 8,944$$

- d) stabilisca se la funzione presenta qualche simmetria, determini la simmetria nel caso della risposta affermativa;

Si vede che la funzione è simmetrica rispetto al punto di incontro tra i due asintoti. È una simmetria centrale, il punto di incontro è $(-3; -6)$.

MATURITÀ 2013

Nel disegno in basso ci sono anche due altre simmetrie, rispetto a due rette:



- e) determini l'area della porzione del piano finita compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

Significa l'area tra $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$. L'area si trova in questo modo:

$$A = \left| \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x^2 - 5}{x + 3} dx \right|$$

Per fare l'area dobbiamo fare la divisione della frazione: $\frac{x^2 - 5}{x + 3} = x - 3 + \frac{4}{x + 3}$

L'integrale è adesso facile: $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(x - 3 + \frac{4}{x + 3} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln(x + 3) \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = -5,72$

L'area sarà 5,72

MATURITÀ 2013

Problema 2

- a) Per essere tangente alla retta $y = 2x - 1$ nel punto di ascissa 0 la funzione deve passare per lo stesso punto. Il punto è $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ $P(0; -1)$

Per essere tangente la derivata deve essere uguale alla m della retta, cioè a 2

$$y'(0) = 2$$

Usando il punto $P(0; -1)$ avremo $b \cdot e^0 = b = -1$

La derivata di $(ax - 1)e^x$ sarà $y' = a e^x + (ax - 1)e^x = (ax + a - 1)e^x$

Quando $x = 0$ la $y' = 2$ quindi $(a \cdot 0 + a - 1)e^0 = a - 1 = 2$ cioè $a = 3$

La funzione è $f(x) = (3x - 1)e^x$

- b) studi tale funzione f , tracci il grafico;

1. Intersezione con gli assi:

$$x = 0 \quad y = -1$$

$$y = 0 \quad (3x - 1)e^x = 0 \quad \text{che diventa } 3x - 1 = 0 \quad \text{cioè } x = \frac{1}{3} \quad \text{mentre } e^x = 0 \text{ MAI}$$

2. Studio del segno:

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x - 1$		-	+
e^x		+	+
y		-	+

3. Limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)e^x = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = -\infty \cdot 0 = \text{indeterminato} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{e^{-x}} = l'Hopital = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-e^{-x}} = \frac{3}{-\infty} = \frac{3}{-\infty} = 0^-$$

4. Asintoti:

$y = 0$, non ci sono asintoti obliqui quando c'è e^x

5. Derivata prima, massimi e minimi:

$$y' = 3e^x + (3x - 1)e^x = (3x + 2)e^x$$

$$c'è \text{ un minimo in } x = -\frac{2}{3}, \quad y = \left(3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right)e^{-\frac{2}{3}} = -3 \cdot 0,51 = -1,54$$

	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x + 2$		-	+
e^x		+	+
y'		-	+
		$\searrow$ m $\nearrow$	

6. Derivata seconda e flessi:

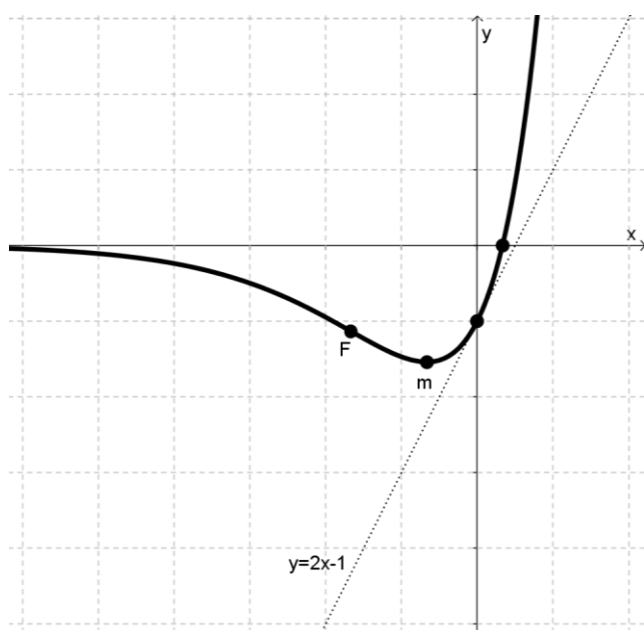
$$y'' = 3e^x + (3x + 2)e^x = (3x + 5)e^x$$

MATURITÀ 2013

C'è un flesso quando $x = -\frac{5}{3}$, $y = \left(3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - 1\right) \cdot e^{-\frac{5}{3}} = -6 \cdot 0,19 = -1,133$

Possiamo fare la tabella e il disegno:

x	y	
0	-1	
0,333	0	
$+\infty$	$+\infty$	con e^x non ci sono asintoti obliqui
$-\infty$	0^-	asintoto orizzontale $y = 0$
-0,667	-1,54	minimo
-1,67	-1,133	flesso



- c) trovi le equazioni della retta t tangente al grafico della funzione f nel punto d'intersezione con l'asse delle ascisse;

La retta passa per il punto $P\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. La k si trova con la derivata.

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3 \cdot \frac{1}{3} + 2\right) e^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 1,4 = 4,2$$

$$y = kx + q \quad \Rightarrow \quad 0 = 4,2 \cdot \frac{1}{3} + q \quad \Rightarrow \quad q = -1,4$$

La retta è $y = 4,2x - 1,4$

- d) trovi l'area della parte finita del piano delimitata dal grafico della funzione f e gli assi cartesiani.

È l'area tra 0 e $\frac{1}{3}$. Si trova con l'integrale:

$$A = \left| \int_0^{\frac{1}{3}} (3x - 1)e^x dx \right|$$

$$\int (3x - 1)e^x dx = \int 3xe^x dx - \int e^x dx = 3 \int xe^x dx - \int e^x dx$$

Il primo integrale si fa per parti, dove $e^x = f'$, $x = g$:

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x$$

$$\text{Quindi } \int (3x - 1)e^x dx = 3(e^x x - e^x) - e^x = 3x e^x - 3e^x - e^x = (3x - 4)e^x$$

$$[(3x - 4)e^x]_0^{\frac{1}{3}} = \left(\left(3 \cdot \frac{1}{3} - 4 \right) e^{\frac{1}{3}} \right) - ((3 \cdot 0 - 4)e^0) = -4,2 - (-4) = -0,2$$

L'area deve essere positiva, quindi $A = 0,2$

Questionario:

- 1) La circonferenza $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ha centro $C\left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}\right)$ e quindi $C(3; -5)$

$$\text{Il raggio è } r = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma} = \sqrt{9 + 25 - 30} = \sqrt{4} = 2$$

Il vettore è $(2, 2)$, la $m = 1$. La m perpendicolare è -1 . La retta perpendicolare è $y = -x + q$ e passa per $(3, -5)$ quindi $-5 = -3 + q \Rightarrow q = -2$
La retta è $y = -x - 2$

- 2) $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ quindi l'equazione diventa

$\cos^2 2x - \sin^2 2x + \sqrt{2} \sin 2x = 1$. I gradi sono pari e dispari insieme, quindi trasformiamo il $\cos^2 2x$ per avere solo $\sin 2x$:

$$1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x + \sqrt{2} \sin 2x = 1$$

$$-2 \sin^2 2x + \sqrt{2} \sin 2x = 0 \text{ che diventa } \sin 2x (-2 \sin 2x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \text{ quando } \begin{cases} 2x_1 = 0 + 2k\pi \\ 2x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = k\pi \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$-2 \sin 2x + \sqrt{2} = 0 \text{ quando } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e quindi } \begin{cases} 2x_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x_4 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{che diventa } \begin{cases} x_3 = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x_4 = \frac{3}{8}\pi + k\pi \end{cases}$$

- 3) La probabilità di avere al 99% almeno 1 testa è la probabilità di avere all'1% solo croce.

La probabilità di avere con n lanci solo croce è $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Questa probabilità deve essere più piccola di 1%, cioè più piccola di 0,01: $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01$

Ci sono due modi: o **proviamo** quale n fa un numero più piccolo di 0,01. I tentativi sono:

n	1	2	3	4	5	6	7
Probabilità	0,5	0,25	0,125	0,062	0,031	0,016	0,008

Ci vogliono 7 lanci.

Possiamo usare un metodo più preciso:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01 \text{ diventa } n \log\left(\frac{1}{2}\right) < \log 0,01 \text{ cioè } -0,3n < -2 \quad n > \frac{2}{0,3}$$

E quindi $n > 6,7$ e il risultato è proprio 7

- 4) Dentro (...)! ci devono essere solo numeri positivi o 0, quindi $n \geq 3$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} - 2 = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} \quad (n-1)(n-2) - 2 = n$$

$$n^2 - n - 2n + 2 - 2 = n \text{ diventa } n^2 - 4n = 0 \text{ che ha soluzioni } n_1 = 4, \quad n_2 = 0$$

La prima soluzione nell'equazione va bene, la seconda no, perché n deve essere $n \geq 3$

MATURITÀ 2013

$$5) \quad x^2 \log \frac{1}{2} > \log \frac{1}{16} \qquad -0,3x^2 > -1,2 \qquad x^2 < 4$$

L'equazione diventa $x^2 - 4 < 0$ e quindi $-2 < x < 2$

C'è un altro modo per risolvere l'esercizio:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \frac{1}{16} \qquad 2^{x^2} < 16 \qquad 2^{x^2} < 2^4 \qquad x^2 < 4 \text{ come prima}$$

$$6) \quad \left| \frac{m+i}{m-i} \right| = \frac{|m+i|}{|m-i|} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} \quad \text{usiamo De l'Hopital}$$

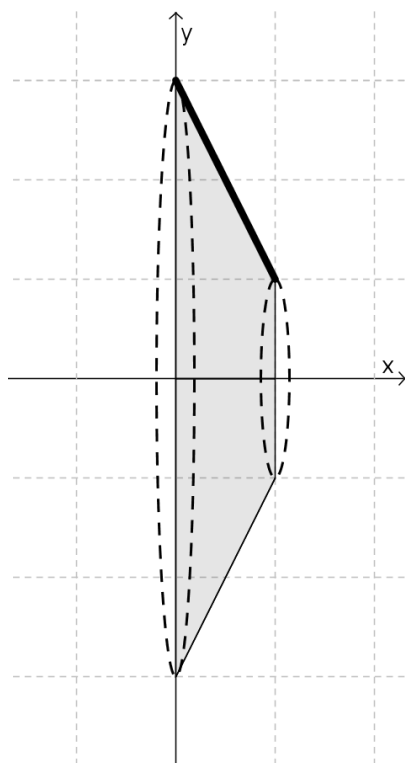
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{semplifichiamo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1} = 2 \quad \text{Il risultato è 2}$$

8) La figura dell'esercizio è in basso (immaginala in 3D)

Il volume si calcola con la formula $V = \pi \int_0^1 (3 - 2x)^2 dx =$

$$V = \pi \int_0^1 (9 - 12x + 4x^2) dx = \pi \cdot \left[9x - 6x^2 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 = \pi \cdot (4,33 - 0) = 13,6$$



Problema 1

Sono assegnate le funzioni $y = \frac{x^2+ax}{x-b}$ dove a e b sono parametri reali.

Il candidato:

- determini i valori di tali parametri in modo che il grafico di una delle funzioni assegnate abbia l'asintoto verticale di equazione $x = 1$ e risulti tangente alla retta di equazione $y = -x$ nel punto di ascissa $x = 0$;
- studi la funzione ottenuta, disegnandone il grafico nel sistema di riferimento Oxy ;
- calcoli la distanza dei punti estremanti;
- determini l'area della porzione del piano finita compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

Problema 2

È data la funzione $f(x) = (x - 1)e^x$.

Il candidato:

- studi tale funzione $f(x)$, tracci il grafico;
- trovi le equazioni della retta t tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto d'intersezione con l'asse delle ascisse;
- trovi l'area della parte finita del piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ e dagli assi cartesiani.
- tracci il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$ e indichi le coordinate del punto P dove la funzione è continua ma non è derivabile.

Questionario

- Risolvere il triangolo ABC di cui è noto che il lato BC misura 3cm, l'angolo ABC è ampio 45° , il lato AB è lungo 6 cm. Inoltre calcolare l'area del triangolo ABC .
- Trovare il dominio della funzione $y = 5 \cotg\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- Scrivere lo sviluppo di $(A - B)^6$.
- Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x)}$.
- Risolvere l'equazione $\log(3 - x) + \log(x + 4) = \log(2 - x)$.
- Trovare il valore del parametro k reale per cui la retta $r: y = k - x$ risulta tangente alla parabola $p: y = x^2 - kx$. Disegnare la parabola per tale valore del parametro k .
- Trovare tutti i numeri complessi la cui potenza seconda è uguale alla unità immaginaria i . Riportare la soluzioni nel piano di Gauss.
- Calcolare il seguente integrale $\int x \sqrt{3x^2 - 4} \, dx$. Verificare il risultato calcolandone la derivata.

MATURITÀ 2014

Problema 1

- a) Si ha l'asintoto verticale $x = 1$ se nella funzione $b = 1$, cioè se con $x = 0$ la frazione diventa $\frac{n}{0}$. Quindi **$b = 1$**

La funzione diventa $y = \frac{x^2+ax}{x-1}$

La retta $y = -x$ ha $k = -1$. Allora la derivata della funzione deve essere $y'(0) = -1$.

$y' = \frac{(2x+a)(x-1)-1(x^2+ax)}{(x-1)^2}$ e diventa $y'(0) = \frac{(0+a)(0-1)-1(0+0)}{(0-1)^2} = -a$. Allora $-a = -1$ cioè **$a = 1$**

La funzione diventa **$y = \frac{x^2+x}{x-1}$**

- b) Vediamo le intersezioni con gli assi, il segno, i limiti, gli asintoti, massimi e minimi:

Se $x = 0$ $y = \frac{0+0}{0-1} = 0$

Se $y = 0$ $0 = x^2 + x$ cioè $x^2 + x = 0$ e con il discriminante $x_1 = 0$ $x_2 = -1$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^2 + x$		+	-	+	+
$x - 1$		-	-	-	+
y		-	+	-	+

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{2}{0} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{2}{0} = -\infty$

C'è un asintoto obliquo. Facciamo la divisione

$(x^2 + x) \div (x - 1) = x + 2 + \frac{2}{x-1}$

ASINTOTI:

$x = 1$

$y = x + 2$

La derivata prima sarà $y' = \frac{(2x+1)(x-1)-1(x^2+x)}{(x-1)^2}$

$y' = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

Per trovare i massimi e i minimi studiamo il segno della derivata:

La parte sopra $x^2 - 2x - 1 = 0$ ha soluzioni $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Vediamo se sono massimi o minimi

$-\infty$ $-0,4142$ 1 $2,4142$ $+\infty$

MATURITÀ 2014

$x^2 - 2x - 1$	+	-	-	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+
y'	+	-	-	+
	↗	M	↘	m

Quando $x = 1 - \sqrt{2}$ abbiamo un massimo e $y(1 - \sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} = 0,1716$

Quando $x = 1 + \sqrt{2}$ abbiamo un minimo e $y(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} = 5,8284$

Possiamo trovare la derivata seconda e abbiamo $y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$

Non ci sono flessi, perché mai $y'' = 0$

Possiamo fare una tabella con tutti i punti trovati e gli asintoti e abbiamo

x	y
0	0
-1	0
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$
1^+	$+\infty$
1^-	$-\infty$
-0,4142	0,1716
2,4142	5,8284

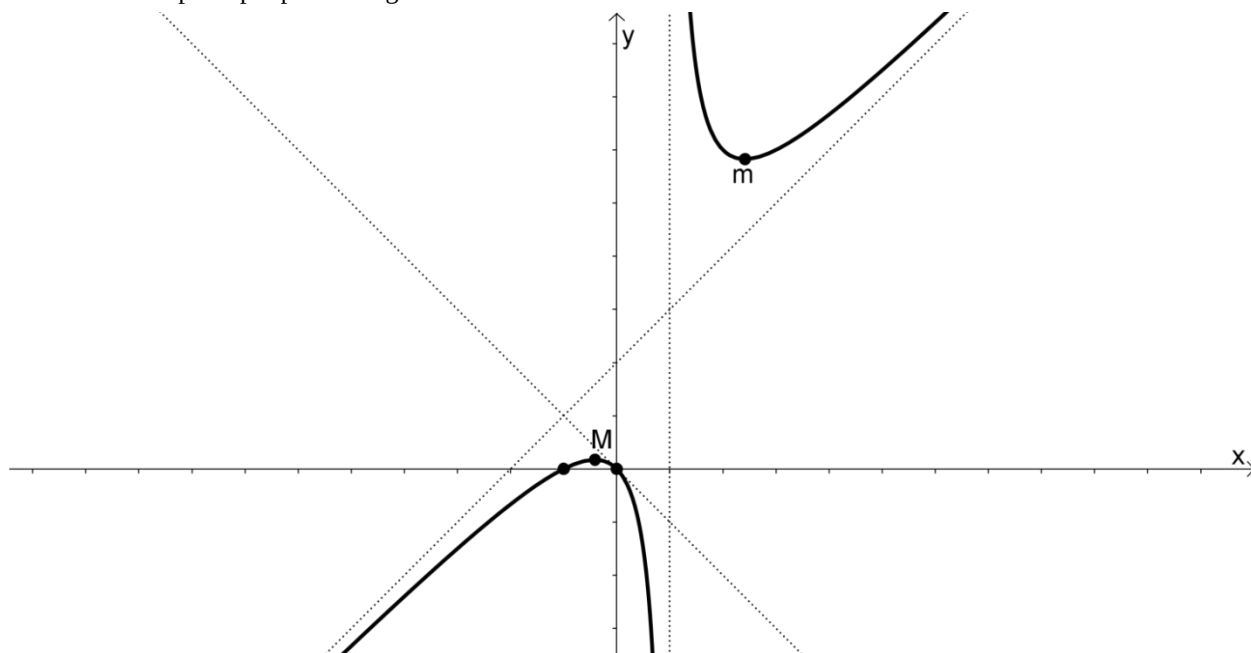
asintoti

$$x = 1$$

$$y = x + 2$$

La funzione è tangente
alla retta $y = -x$
nel punto $(0; 0)$

Abbiamo tutti i punti per poter disegnare la funzione.



MATURITÀ 2014

- c) La distanza tra Massimo e minimo è

$$mM = \sqrt{(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})^2 + (3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 32} = \sqrt{40} = 6,32$$

- d) L'area è tra -1 e 0 , quindi si calcola l'integrale $\int_{-1}^0 \frac{x^2+x}{x-1} dx$.

Bisogna fare il calcolo della frazione: $\frac{x^2+x}{x-1} = x + 2 + \frac{2}{x-1}$ e quindi

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2+x}{x-1} dx = \int_{-1}^0 \left(x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-1| \right]_{-1}^0 = 0 + 0,113 = 0,113$$

L'area è 0,113

Problema 2

a) Se $x = 0$ allora $y = (0 - 1)e^0 = -1$

Se $y = 0$ allora $(x - 1)e^x = 0$ che significa $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ e^x = 0 \end{cases}$.

La prima equazione diventa $x = 1$, nella seconda equazione $e^x = 0$ MAI

Studio del segno:

	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-		+
e^x	+		+
y	-		+

Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^x = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^x = -\infty \cdot 0 = \text{indeterminato} \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = l'Hopital = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

ASINTOTI: $y = 0$

Derivata prima: $y' = 1 \cdot e^x + (x - 1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Studio del segno di y' . C'è un minimo quando $x = 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-		+
e^x	+		+
y'	-		+
	↘	m	↗

Derivata seconda: $y'' = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$

Studio del segno di y'' . C'è un flesso quando $x = -1$

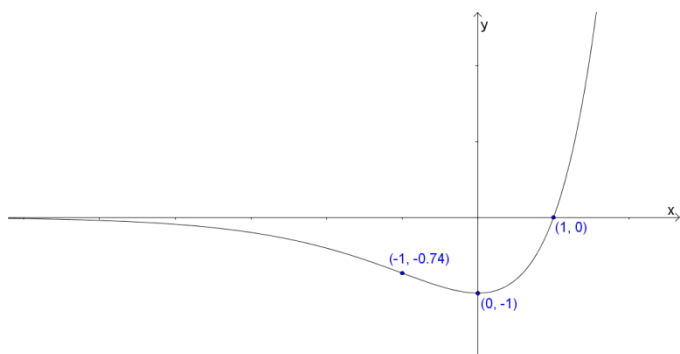
MATURITÀ 2014

$$y = (-1 - 1)e^{-1} = -2 \cdot 0,37 = -0,74$$

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$		$-$	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	$+$	$+$
	$\cap$	$\cup$	

Tabella e disegno:

x	y	
0	-1	<i>minimo</i>
1	0	
$+\infty$	$+\infty$	<i>con e^x non ci sono asintoti obliqui</i>
$-\infty$	0^-	<i>asintoto orizzontale $y = 0$</i>
-1	-0,7358	<i>flesso</i>



b) La retta t è $y = kx + q$ dove $k = f'(1)$ e la q si trova sapendo che passa per $(1; 0)$:

$$k = f'(1) = 1 \cdot e^1 = e$$

$$0 = e \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -e$$

$$\text{Retta } t: \quad y = ex - e = e(x - 1)$$

c) È l'integrale di $\int_0^1 (x - 1)e^x dx$

$$\int (x - 1)e^x dx = \int xe^x dx - \int e^x dx = \int xe^x dx - e^x$$

Il primo integrale si fa per parti, dove $e^x = f'$, $x = g$:

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x$$

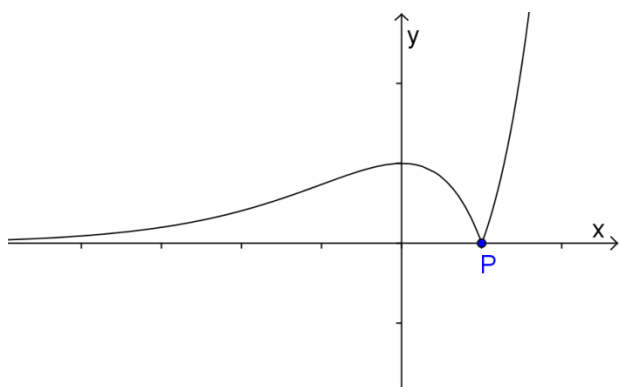
MATURITÀ 2014

Il risultato diventa:

$$\int_0^1 (x-1)e^x dx = [e^x x - 2e^x]_0^1 = (e^1 \cdot 1 - 2e^1) - (e^0 \cdot 0 - 2e^0) = -2,72 + 2 = -0,72$$

L'area deve essere positiva, quindi $A = 0,72$

d) Il punto P è lì dove la funzione è “strana”. Ecco il disegno:



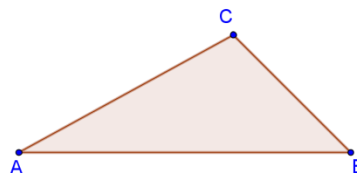
Questionario:

- 1) Il triangolo è come a destra.

$$c = 6\text{cm}$$

$$a = 3\text{cm}$$

$$\beta = 45^\circ$$



Conosciamo due lati e l'angolo tra loro, possiamo trovare l'area:

$$A = \frac{1}{2}ac \sin \beta \quad A = 6,36\text{cm}^2$$

Possiamo poi usare il **teorema del coseno**:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta = 36 + 9 - 36 \cos 45^\circ = 19,544\text{cm}^2$$

$$b = \sqrt{19,544} \quad b = 4,42\text{cm}$$

Gli angoli α e γ si trovano con il **teorema del seno**:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad \sin \alpha = 0,48 \quad \alpha = 28,7^\circ$$

$$\gamma = 180 - \beta - \alpha \quad \gamma = 106,3^\circ$$

- 2) $\cotg x$ è $\frac{\cos x}{\sin x}$ ed esiste quando la parte sotto è $\neq 0$. Quindi il dominio diventa:

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \quad 3x + \frac{\pi}{2} \neq 0 + k\pi \quad 3x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{La soluzione finale diventa: } x \neq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$$

- 3) Si usa la formula del triangolo di Pascal. Il triangolo è fatto così:

				1				
			1	1				
		1	2	1				
	1	3	3	1				
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		

La formula è:

$$(A - B)^6 = 1 \cdot A^6 + 6 \cdot A^5(-B)^1 + 15A^4(-B)^2 + 20A^3(-B)^3 + 15A^2(-B)^4 + 6A^1(-B)^5 + 1(-B)^6 =$$

$$= A^6 - 6A^5B + 15A^4B^2 - 20A^3B^3 + 15A^2B^4 - 6AB^5 + B^6$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x)} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0}$ Frazione indeterminata. Si usa De l'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{0^+}{1} = 0^+$$

- 5) L'equazione diventa: $\log[(3-x)(x+4)] = \log(2-x)$ e quindi

$$(3-x)(x+4) = 2-x \quad \text{cioè} \quad 3x - x^2 + 12 - 4x = 2-x \quad \text{cioè}$$

$$-x^2 + 10 = 0 \quad \text{che ha soluzioni } x_1 = \sqrt{10} = 3,16 \quad x_2 = -\sqrt{10} = -3,16$$

Facciamo la verifica. Abbiamo nel primo caso:

$$\log(-0,16) + \log 7,16 = \log(-1,16) \quad \text{In log non ci possono essere valori negativi, quindi il valore 3,16 non va bene}$$

Nel secondo caso:

$$\log 6,16 + \log 0,86 = \log 5,16 \quad \text{Sono tutti valori positivi, la soluzione è OK.}$$

L'unica soluzione è quindi $x = -\sqrt{10} = -3,16$

- 6) La retta e la parabola hanno un solo punto in comune, quindi il sistema $\begin{cases} y = k - x \\ y = x^2 - kx \end{cases}$ ha una sola soluzione. L'equazione diventa $x^2 - kx = k - x$ cioè $x^2 + x(1 - k) - k = 0$. C'è una soluzione se $\Delta = 0$ cioè $(1 - k)^2 + 4k = 0$ e quindi $k^2 + 2k + 1 = 0$. La soluzione è che **$k = -1$**

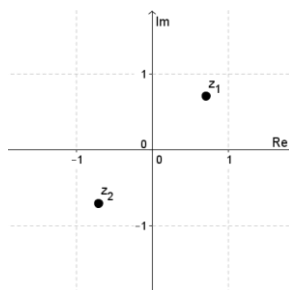
- 7) $z^2 = i$ diventa in forma goniometrica: $z^2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

Sappiamo quindi che $|z| = \sqrt{1} = 1$

$$\theta_1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \theta_2 = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{5}{4}\pi$$

Le soluzioni sono $z_1 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
 $z_2 = \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)$

A destra c'è il disegno sul piano di Gauss



- 8) $\int x \sqrt{3x^2 - 4} dx$ si può fare per sostituzione, se pensiamo che fuori dalla radice c'è quasi la derivata di ciò che è dentro la radice. Quindi sostituiamo

$$t = 3x^2 - 4 \quad dt = 6x dx \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{6} dt = x dx$$

L'integrale diventa

$$\int x \sqrt{3x^2 - 4} dx = \int \frac{1}{6} \sqrt{t} dt = \frac{1}{6} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{6} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} t^{\frac{1}{2} + 1} \right) + k$$

Cioè $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{9} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{9} (3x^2 - 4)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{9} \sqrt{3x^2 - 4}^3$

$$F(x) = \frac{1}{9} \sqrt{3x^2 - 4}^3 \quad \text{oppure} \quad F(x) = \frac{1}{9} (3x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}$$

La derivata di $F(x)$ diventa $y' = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot 6x \cdot (3x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} = x \cdot (3x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} = x \sqrt{3x^2 - 4}$

MATURITÀ 2015

Problema 1

È dato il fascio delle funzioni di equazione $f(x) = \frac{x^2+2x+a}{x^2+1}$ con parametro reale a .

Il candidato:

- trovi i valori del parametro in modo che $f'(-1) = 0$;
- studi la funzione $f(x)$ trovata e tracci il suo grafico;
- trovi l'eventuale punto di intersezione tra la funzione e il suo asintoto;
- calcoli l'area della parte del piano delimitata dagli assi e dal grafico della funzione $f(x)$.

Problema 2

È data la funzione $f(x) = \frac{10 \ln x}{x}$. Il candidato:

- studi tale funzione $f(x)$, tracci il grafico;
- trovi l'equazione della retta t tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto d'intersezione con l'asse x ;
- trovi l'area della parte finita del piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$, dall'asse x e dalla retta verticale passante per il punto stazionario della funzione;
- tracci il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$.

Questionario

- Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(1, -2)$, tangente alla retta $t: x + 2y - 7 = 0$. Disegnare retta e circonferenza.
- Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\cos(2x) + \sin(x) = 1$.
- Trovare il modulo del numero complesso $(1 - i\sqrt{3})^8$.
- Trovare perimetro, area e i quattro angoli di un rombo il cui lato misura 5cm e la diagonale maggiore 8cm . Disegnare il rombo.
- Determinare tutti i termini negativi della progressione aritmetica che soddisfano le condizioni:
$$\begin{cases} a_3 - a_5 = -48 \\ a_2 + a_3 = 8 \end{cases}$$
. Trovare la somma dei primi 1000 numeri della progressione.
- I litri di benzina verde venduti quotidianamente da un distributore nell'arco di una settimana sono: 1500, 1600, 1550, 1400, 1300, 1550, 200. Calcolare la quantità media di litri venduta quotidianamente e la deviazione standard.
- Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.
- Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y = x^2 - a^2$ e dall'asse x è uguale a 36.

Problema 1

$$a) \quad f(x) = \frac{x^2+2x+a}{x^2+1} \quad f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x+a)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x-2ax+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(-1) = 0 \text{ quindi } \frac{-2(-1)^2+2(-1)-2a(-1)+2}{((-1)^2+1)^2} = 0$$

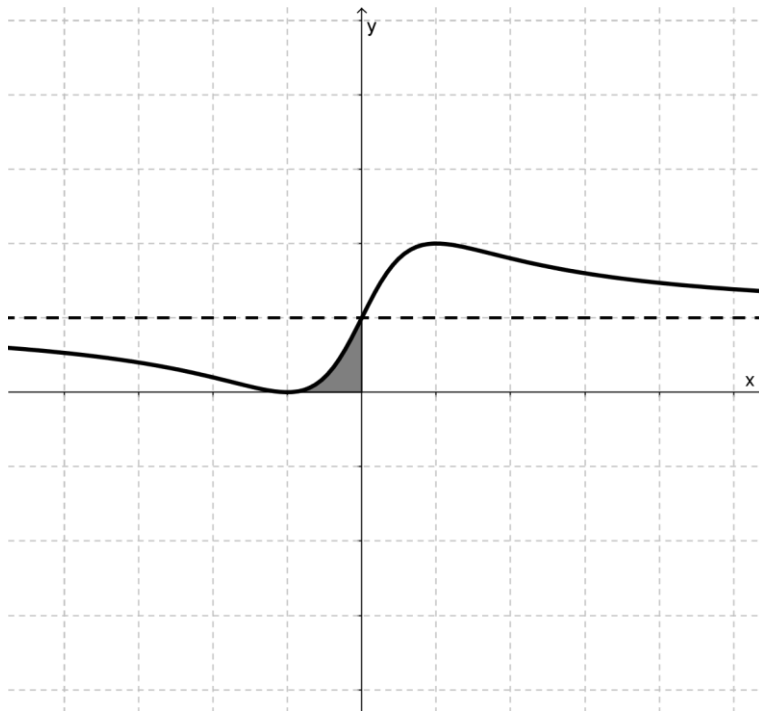
$$\text{L'equazione diventa } -2 - 2 + 2a + 2 = 0 \quad \mathbf{a = 1}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$$

x	y	
0	1	flesso
-1	0	minimo
$-\infty$	1	asintoto $y = 1$
$+\infty$	1	
1	2	Massimo
1,73	1,87	flesso
-1,73	0,13	flesso



$$c) \quad \text{Intersezione tra: } \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} \end{cases} \quad x = 0$$

L'intersezione è il punto $P(0; 1)$

$$d) \quad \text{Delimitata dagli assi, è quindi la parte colorata: } \int_{-1}^0 f(x) dx.$$

$$\text{Si fa la divisione: } \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1} \text{ e quindi}$$

$$\int_{-1}^0 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = |x + \ln|x^2 + 1||_{-1}^0 = (0 + \ln 1) - (-1 + \ln 2) = 0,3$$

L'area è uguale a 0,3

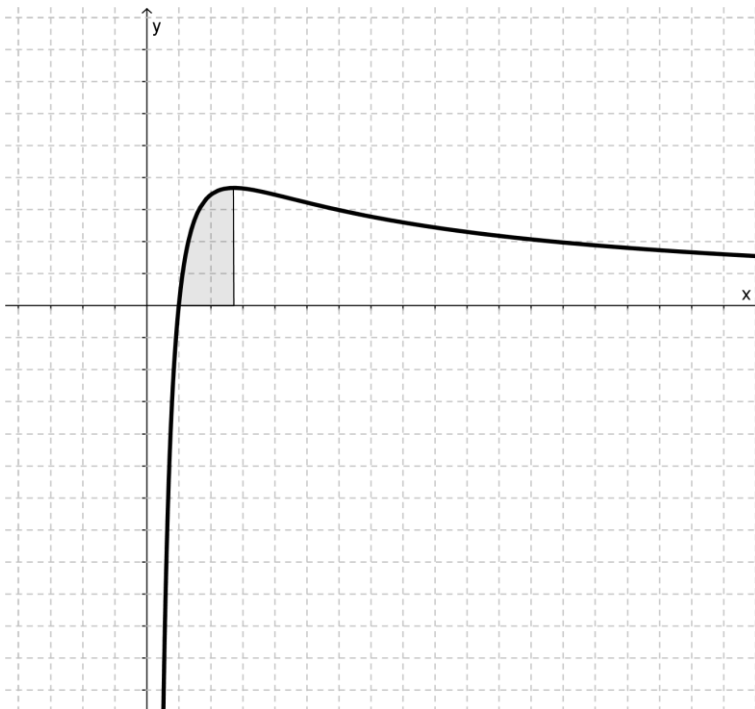
Problema 2

a) $f(x) = \frac{10 \ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{10(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{10(2 \ln x - 3)}{x^3}$$

x	y	
0^+	$-\infty$	asintoto $x = 0$
1	0	
$+\infty$	0^+	asintoto $y = 0$
2,7	3,7	Massimo
4,5	3,35	flesso



b) Punto di intersezione con asse x : $(1; 0)$

La retta ha $k = f'(1)$ e quindi $k = \frac{10(1 - \ln 1)}{1^2} = 10$

La retta $y = 10x + q$ passa per $(1; 0)$ e quindi $0 = 10 + q \quad q = -10$

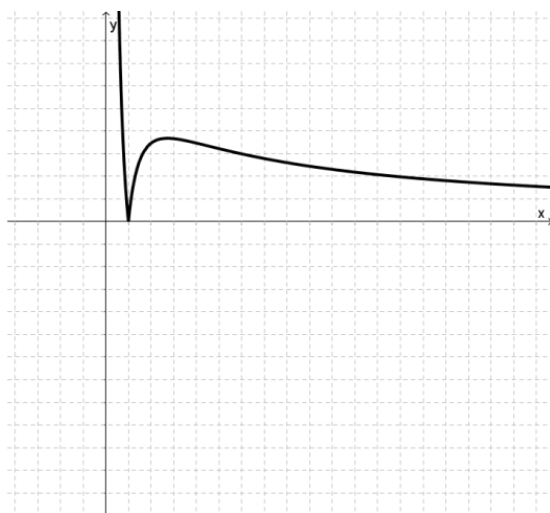
La retta è $y = 10x - 10$

c) È l'area del disegno. Si fa l'integrale $\int_1^e \frac{10 \ln x}{x} dx$ Si fa per sostituzione o per parti

Per sostituzione $\begin{cases} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{cases} \quad \int \frac{10 \ln x}{x} dx = \int 10t dt = 5t^2 + c = 5(\ln x)^2 + c$

$|5 \ln^2 x|_1^e = 5(\ln e)^2 - 5(\ln 1)^2 = 5$ L'area è 5

d)



Questionario:

- 1) **Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(1, -2)$, tangente alla retta $t: x + 2y - 7 = 0$.**

Se trovo la distanza tra il centro e la retta trovo il raggio.

$$\text{Distanza centro retta: } r = \frac{|1+2 \cdot (-2)-7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Equazione circonferenza: } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$$

- 2) **Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\cos(2x) + \sin(x) = 1$.**

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$-2 \sin^2 x + \sin x = 0 \quad \sin x (-2 \sin x + 1) = 0$$

Due soluzioni:

$$\sin x = 0$$

$$x_1 = 2k\pi$$

$$x_2 = \pi + 2k\pi$$

$$-2 \sin x + 1 = 0$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_4 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

- 3) **Trovare il modulo del numero complesso $(1 - i\sqrt{3})^8$.**

Devo trovare il modulo, non mi interessa l'angolo

$$\text{Il modulo di } 1 - i\sqrt{3} \text{ è } \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Il modulo del numero elevato a otto è } 2^8 = 256$$

- 4) **Trovare perimetro, area e i quattro angoli di un rombo il cui lato misura 5cm e la diagonale maggiore 8cm . Disegnare il rombo.**

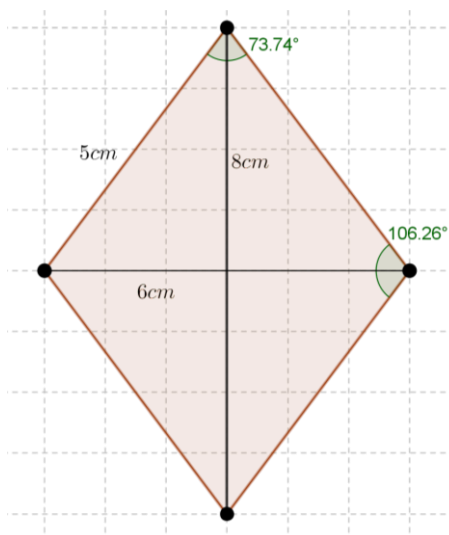
I risultati sono nel disegno a destra.

Per trovare la diagonale minore si usa Pitagora

Per trovare gli angoli si usa

la formula dei seni o dei coseni

Ogni quadretto un centimetro



- 5) **Determinare tutti i termini negativi della progressione aritmetica che soddisfano le condizioni:**
 $\begin{cases} a_3 - a_5 = -48 \\ a_2 + a_3 = 8 \end{cases}$. **Trovare la somma dei primi 1000 numeri della progressione.**

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d & d &= 24 & s_{1000} &= 1000 \cdot \frac{-32+23944}{2} = 11.956.000 \\ a_5 &= a_1 + 4d & a_1 &= -32 \\ a_2 &= a_1 + d & a_2 &= -8 \\ & & a_{1000} &= 23944 \end{aligned}$$

- 6) **I litri di benzina verde venduti quotidianamente da un distributore nell'arco di una settimana sono: 1500, 1600, 1550, 1400, 1300, 1550, 200. Calcolare la quantità media di litri venduta quotidianamente e la deviazione standard.**

Media: 1300l Deviazione standard: 459l

- 7) **Calcolare il limite** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.

Due volte l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \cdot e^{\sin x} - \sin x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2} = 0$$

- 8) **Trovare il valore del parametro reale a per cui l'area della regione finita delimitata dalla curva grafico della funzione $y = x^2 - a^2$ e dall'asse x è uguale a 36.**

Abbiamo una parabola che ha due soluzioni: $x_1 = a$ $x_2 = -a$

L'area della parabola tra $-a$ e a deve essere 36:

$$\int_{-a}^a (x^2 - a^2) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - a^2 x \right]_{-a}^a = \left(\frac{1}{3} a^3 - a^3 \right) - \left(-\frac{1}{3} a^3 + a^3 \right) = -\frac{4}{3} a^3$$

L'area è sempre positiva, quindi devo mettere il valore assoluto:

$$\left| -\frac{4}{3} a^3 \right| = 36 \quad \text{e quindi } a = -3 \quad \text{oppure } a = 3, \text{ il risultato è lo stesso}$$

MATURITÀ 2016

Problema 1

Siano date due funzioni, la prima $g(x) = \ln(x + 2)$, la seconda $h(x) = \ln(6 - x)$.

Il candidato:

- trovi il punto di intersezione tra le due funzioni; (7)
- studi la funzione $f(x) = g(x) + h(x)$ e tracci il grafico; (33: 3+4+4+3+7+7+5)
- trovi l'area della parte di piano delimitata dalla funzione $f(x)$ e l'asse x ; (10)
- disegni la funzione $g(x)$. (10)

Problema 2

È data la famiglia di funzioni $f(x) = \frac{x^2+a}{x+1}$ con a parametro reale.

Il candidato:

- trovi il valore di a per cui la funzione ha un minimo in $x = 1$; (10)
- studi la funzione $f(x)$ ottenuta, tracci il grafico; (30: 1+1+4+5+7+7+5)
- trovi l'equazione della retta t tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto d'intersezione con l'asse y ; (10)
- trovi l'area della parte finita del piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ e dalla retta di equazione $y = 3$. (10)

Questionario

- Una classe è formata da 23 alunni: 15 ragazze e 8 ragazzi. Si deve formare un gruppo di 5 alunni, di cui 3 ragazze e 2 ragazzi. Quanti sono i possibili gruppi?
- Trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$. Calcolare la distanza tra i due punti.
- Trovare il modulo del numero complesso $\frac{(1+2i)^7}{(2-i)^5}$.
- Disegnare le circonferenze tangenti agli assi x e y e con il centro sulla retta $y = 2x - 3$. Scrivere l'equazione delle circonferenze.
- Risolvere l'equazione $e^{2x} - 3e^x = 4$ nell'insieme dei numeri reali.
- In una progressione geometrica la somma di tutti gli infiniti termini è 3. Il primo termine è 2, scrivere i primi 5 termini della progressione.
- Trovare l'area e la misura degli angoli di un triangolo in cui $c = 8\text{cm}$, $\alpha = \beta = 4\gamma$.
- Si calcoli l'integrale $\int_0^\pi e^x \sin x \, dx$.

MATURITÀ 2016

Problema 1

a) $\ln(x+2) = \ln(6-x)$ $P(2; 1.4)$

b) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(6-x)$

1) Dominio: $x+2 > 0 \quad x > -2$ $6-x > 0 \quad x < 6$
 Domino $(-2; 6)$

2) Se $x = 0 \quad y \approx 2,5$
 Se $y = 0 \quad \ln(x+2) + \ln(6-x) = 0 \quad (x+2)(6-x) = 1 \quad x = -1,87 \text{ e } 5,87$

3) $\ln(x+2) + \ln(6-x) > 0$ se $(x+2)(6-x) > 1 \quad -x^2 + 4x - 15 > 0$
 Positiva in $(-1,87; 5,87)$ Negativa in $(-2; -1,87) \cup (5,87; 6)$

4) $\lim_{x \rightarrow -2^+} (\ln(x+2) + \ln(6-x)) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 6^-} (\ln(x+2) + \ln(6-x)) = -\infty$

5) $y' = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{6-x}$ $y' = \frac{2x-4}{x^2-4x-12}$
 Funzione $\nearrow$ in $(-2; 2)$ Funzione $\searrow$ in $(2; 6)$

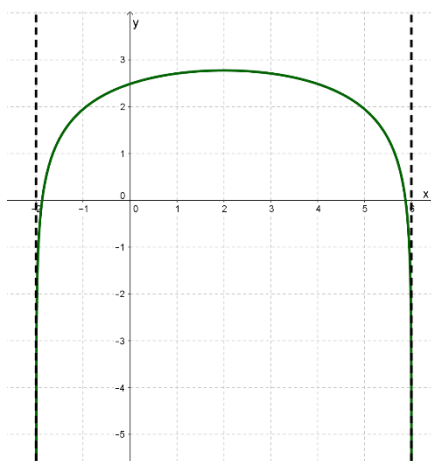
6) $y'' = \frac{-2x^2+8x-40}{(x^2-4x-12)^2}$ Sempre negativa (sempre triste), niente flessi

c) Area $\int_{-1,87}^{5,87} (\ln(x+2) + \ln(6-x)) dx =$
 $|x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) + x \ln(6-x) - x - 6 \ln(6-x)|_{-1,87}^{5,87} = 17,52$

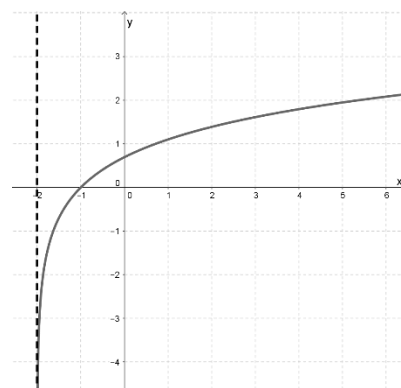
$$\int \ln(x+2) dx = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2)$$

$$\int \ln(6-x) dx = x \ln(6-x) + \int \frac{x}{6-x} dx = x \ln(6-x) + \int \left(-1 + \frac{6}{6-x}\right) dx = x \ln(6-x) - x - 6 \ln(6-x)$$

x	y	
0	2,5	
-1,9	0	
5,9	0	
-2^+	$-\infty$	asint $x = -2$
6^-	$-\infty$	asint. $x = 6$
2	2,8	Massimo



Disegno di $f(x)$



Disegno di $g(x)$

Problema 2

a) $y = \frac{x^2+a}{x+1}$ $y' = \frac{2x^2+2x-x^2-a}{(x+1)^2}$ $0 = \frac{2+2-1-a}{(1+1)^2}$ $a = 3$

b) $y = \frac{x^2+3}{x+1}$

1) Dominio: $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

2) Se $x = 0$ $y = 3$ Se $y = 0$ $x^2 + 3 = 0$ MAI

3) Funzione positiva in $(-1; +\infty)$ Funzione negativa in $(-\infty; -1)$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{4}{0} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{4}{0} = +\infty$
 Asintoto obliquo: $(x^2 + 3) \div (x + 1) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$ Asintoto $y = x - 1$

5) $y' = \frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}$ $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
 Funzione $\nearrow$ in $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ Funzione $\searrow$ in $(-3; -1) \cup (-1; 1)$

Massimo in -3 , minimo in 1

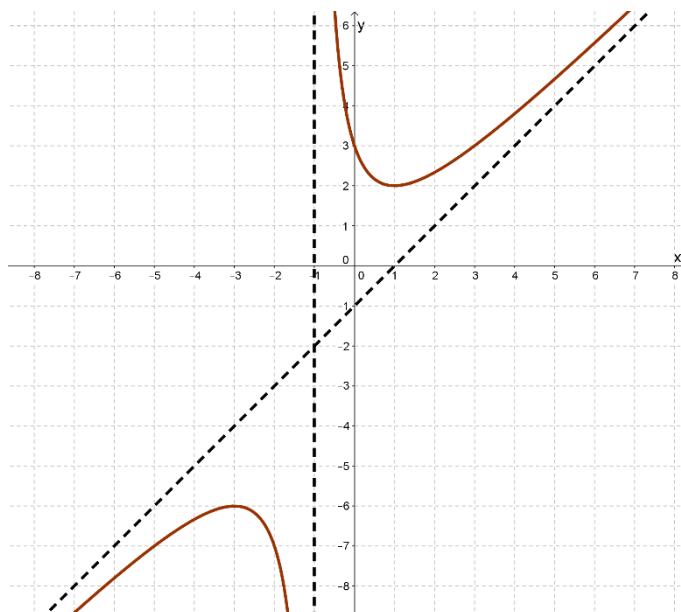
6) $y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$ Niente flessi, triste tra $(-\infty; -1)$ allegra tra $(-1; +\infty)$

c) Intersezione con asse y : $(0; 3)$ Tangente:
 $y'(0) = -3 = m$ $3 = -3 \cdot 0 + q$ $q = 3$ $y = -3x + 3$

d) Retta e funzione si incontrano in $(0; 3)$ e in $(3; 3)$.

Area tra due funzioni $\int_0^3 \left(3 - \frac{x^2+3}{x+1}\right) dx = \left|3x - \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \ln|x+1|\right|_0^3 = 1,955$

x	y	
0	3	
$-\infty$	$-\infty$	Asintoto
$+\infty$	$+\infty$	$y = x - 1$
-1^-	$-\infty$	Asintoto
-1^+	$+\infty$	$x = -1$
1	2	Minimo
-3	-6	Massimo



MATURITÀ 2016

Questionario:

1) Sono combinazioni di 3 ragazze su 15 e di 2 ragazzi su 8. Il risultato è $\binom{15}{3} \cdot \binom{8}{2} = 12740$

2) $y' = 3x^2 - 6x - 9$ Massimo $(-1; 12)$ minimo $(3; -20)$
Distanza: $\sqrt{4^2 + 32^2} = \sqrt{1040} \cong 32,25$

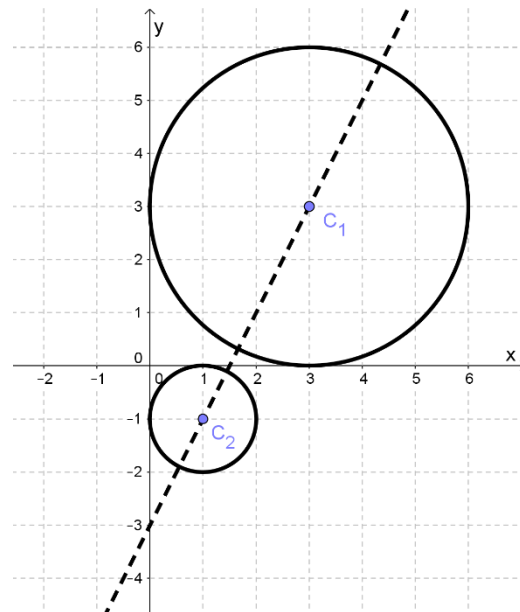
3) Modulo di sopra è $\sqrt{1^2 + 2^2}^7 = \sqrt{5}^7$ Modulo di sotto è $\sqrt{2^2 + 1^2}^5 = \sqrt{5}^5$
Il modulo del numero complesso è $\frac{\sqrt{5}^7}{\sqrt{5}^5} = \sqrt{5}^2 = 5$

4) Il centro è equidistante dagli assi, quindi la x e la y devono essere uguali (a parte il segno) al raggio r
I possibili centri sono quindi $C_1[r; r]$ oppure $C_2[r; -r]$

Il primo caso diventa $r = 2r - 3$ cioè $r = 3$

Il secondo caso diventa $-r = 2r - 3$ cioè $r = 1$

Le due circonferenze sono $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
oppure $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$



5) $e^x = y$ $y^2 - 3y - 4 = 0$ $y = 4, -1$
Solo la soluzione $y = 4$ va bene, quindi
 $e^x = 4$ diventa $x = \ln 4 = 1,4$

6) $s_\infty = 3$ $s_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ $3 = 2 \cdot \frac{1}{1-q}$ $3 - 3q = 2$ $q = \frac{1}{3}$
I primi 5 termini: $2 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{27} \quad \frac{2}{81}$

7) $4\gamma + 4\gamma + \gamma = 180^\circ$ $\gamma = 20^\circ$ $\alpha = 80^\circ$ $\beta = 80^\circ$
 $\frac{8}{\sin 20} = \frac{a}{\sin 80}$ $a = 23,035cm$ $b = 23,035cm$ Area $A = \frac{ab}{2} \sin \gamma = 90,74cm$

8) $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx)$

$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$

$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$

$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$

$\int_0^\pi e^x \sin x dx = \left| \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} \right|_0^\pi = \left(\frac{e^\pi \sin \pi - e^\pi \cos \pi}{2} \right) - \left(\frac{e^0 \sin 0 - e^0 \cos 0}{2} \right) = \frac{e^\pi}{2} + \frac{1}{2} = 12,07$

Problema 1

Sia data la funzione $y = x^4 - 10x^2 + 9$

- studiare la funzione e disegnarne il grafico;
- determinare l'area finita totale racchiusa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse;
- scrivere l'equazione dell'ellisse avente per due vertici e per i fuochi i punti d'intersezione del grafico della funzione con l'asse delle ascisse quindi disegnarla insieme al grafico della funzione.

Problema 2

È dato l'insieme di funzioni

$$y = \frac{ax^2}{x^2 + b}$$

dove a, b sono parametri reali.

- determinare tali parametri in modo che il grafico di una delle funzioni assegnate abbia come asintoti verticali le rette di equazioni $x = -3$ e $x = 3$ e inoltre abbia un asintoto orizzontale di equazione $y = 8$;
- studiare la funzione ottenuta disegnandone il grafico nel sistema di riferimento Oxy ;
- determinare l'area della porzione del piano finita compresa tra il grafico della funzione e la retta $y = -1$.

Questionario

- Calcolare l'integrale $\int_0^1 x e^x dx$.
- Trovare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x-2)}$.
- Disegnare il grafico della funzione $y = x^2 - 1$. Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto con la rotazione della parte negativa del grafico rispetto all'asse delle ascisse.
- Risolvere l'equazione $\sin^2 x - \cos x = 1$.
- Risolvere la disequazione $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{x} + 1$.
- Calcolare la probabilità che mescolando e riordinando a caso quattro biglietti ognuno con una delle cifre 0, 1, 2 e 7 si ottenga il numero 2017.
- Calcolare la somma dei primi cento termini della progressione aritmetica dove $a_1 + a_4 = 14$ e $a_2 + a_5 = 18$.
- Trovare l'equazione generica della circonferenza circoscritta al triangolo OPQ dove $O(0; 0)$, $P(4; 0)$, $Q(0; 2)$. Disegnare la situazione nel sistema cartesiano Oxy .

MATURITÀ 2017

Problema 1

Sia data la funzione $y = x^4 - 10x^2 + 9$

a) Dominio $(-\infty; +\infty)$

Simmetria: pari

Intersezioni: $[0; 9]$

$$x^2 = t \quad t^2 - 10t + 9 = 0 \quad [1; 0] \quad [-1; 0] \quad [3; 0] \quad [-3; 0]$$

Segno: Positiva in $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$
Negativa in $(-3; -1) \cup (1; 3)$

Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 10x^2 + 9) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 10x^2 + 9) = +\infty$

Asintoti: non ci sono

Derivata prima: $y' = 4x^3 - 20x$ Massimo in $x = 0$
minimi in $x = \pm\sqrt{5}$

Derivata seconda: $y'' = 12x^2 - 20$ Flessi in $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

b) Sono tre integrali:

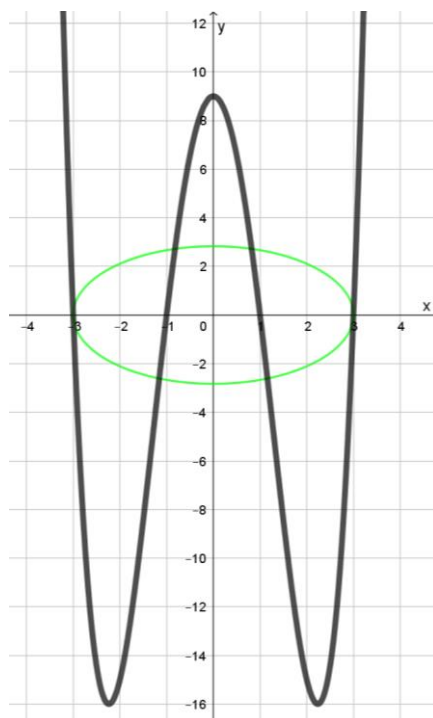
$$\int_{-3}^{-1} (x^4 - 10x^2 + 9) dx = \left| \frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x \right| = \left(-\frac{1}{5} + \frac{10}{3} - \left(-\frac{243}{5} + \frac{270}{3} - 27 \right) \right) = -\frac{304}{15}$$

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 10x^2 + 9) dx = \frac{176}{15}$$

$$\int_1^3 (x^4 - 10x^2 + 9) dx = -\frac{304}{15}$$

La somma è $\frac{304}{15} + \frac{176}{15} + \frac{304}{15} = \frac{784}{15}$

c) Quindi $a = 3$ $c = 1$ $b = \sqrt{8}$ (disegnata in verde)



9) -

Problema 2

a) La prima condizione è $3^2 + b = 0$ cioè $b = -9$

La seconda condizione è $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2-9} = 8$ quindi $a = 8$

La funzione è $y = \frac{8x^2}{x^2-9}$

b) Dominio: $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$

Simmetria: pari

Intersezioni: $[0; 0]$

Segno: positiva per $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

negativa per $x \in (-3; 3)$

Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^2}{x^2-9} = 8$

$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{8x^2}{x^2-9} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{8x^2}{x^2-9} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{x^2-9} = 8$

$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{8x^2}{x^2-9} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{8x^2}{x^2-9} = +\infty$

Asintoti: $x = 3$, $x = -3$, $y = 8$

Derivata prima: $y' = -\frac{144x}{(x^2-9)^2}$

minimo in $[0; 0]$

Derivata seconda: $y'' = \frac{432x^2+1296}{(x^2-9)^3}$

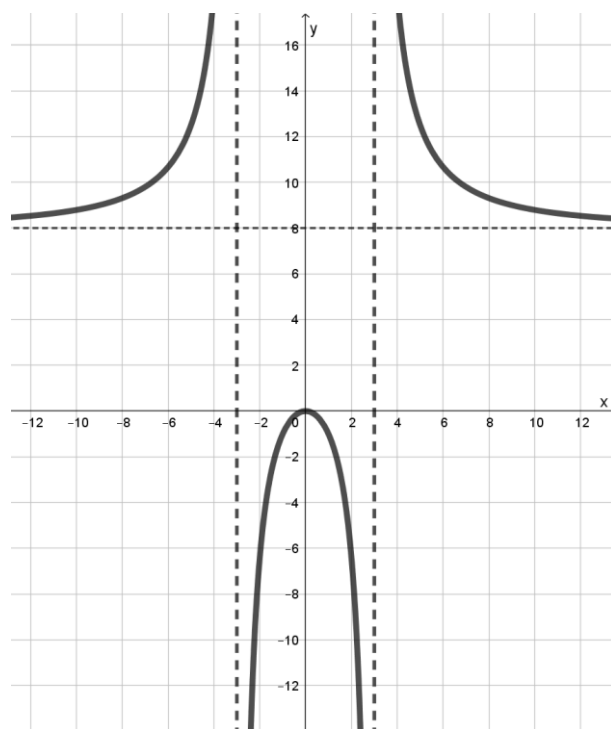
non ci sono flessi

c) Le intersezioni tra funzione e retta sono due:

$\frac{8x^2}{x^2-9} = -1$ $x = \pm 1$ quindi

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{8x^2}{x^2-9} + 1 \right) dx = \int_{-1}^1 \left(8 + \frac{72}{x^2-9} + 1 \right) dx = \int_{-1}^1 \left(9 + \frac{12}{x-3} - \frac{12}{x+3} \right) dx$$

$$= [9x + 12 \ln|x-3| - 12 \ln|x+3|]_{-1}^1 = 18 - 24 \ln 2 = 1,36$$



Questionario

$$1. \int_0^1 x e^x dx = \left| \begin{matrix} f' = e^x & f = e^x \\ g = x & g' = 1 \end{matrix} \right| = x e^x - \int e^x = |x e^x - e^x|_0^1 = 1.$$

$$2. \log_{0,5}(x-2) \geq 0 \quad 0 < x-2 \leq 1 \quad 2 < x \leq 3 \quad x \in (2; 3]$$

$$3. \pi \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \left| \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right) \right|_{-1}^1 = \frac{16}{15} \pi$$

$$4. \sin^2 x - \cos x = 1 \quad 1 - \cos^2 x - \cos x = 1 \quad -\cos x (\cos x + 1) = 0$$

$$\text{L'equazione diventa } \cos x = 0 \quad \text{cioè } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$\text{Oppure } \cos x = -1 \quad x = \pi + 2k\pi$$

$$5. \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x} - 1 \geq 0 \quad \frac{x^2 - (x+1) - x(x+1)}{x(x+1)} \geq 0 \quad \frac{-2x-1}{x(x+1)} \geq 0$$

$$\text{Valida per } x \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$$

$$6. \text{La probabilità è } \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$$

$$\text{Oppure c'è una possibilità su } 4! \text{ quindi } p = \frac{1}{24} = 4,17\%$$

$$7. \begin{cases} a_1 + a_1 + 3d = 14 \\ a_1 + d + a_1 + 4d = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 3d = 14 \\ 2a_1 + 5d = 18 \end{cases} \quad d = 2 \quad a_1 = 4 \quad a_{100} = 202$$

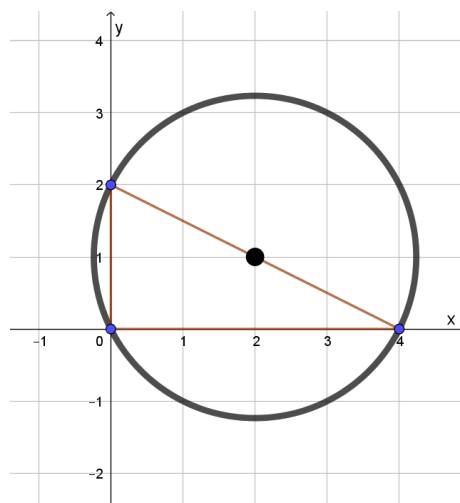
$$\text{La somma dei primi 100 termini è } s_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot n = 10300$$

8. Il triangolo è rettangolo, quindi l'ipotenusa è il diametro, centro è al centro dell'ipotenusa.

$$C[2; 1] \quad r = \sqrt{5}$$

$$\text{Canonica: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$\text{Generica: } x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$



il

MATURITÀ 2018

Problema 1

È data la funzione $f(x) = \frac{ax+3}{x^2-4}$ con il parametro reale a .

Il candidato:

- determini il valore del parametro a affinché la funzione risulti pari;
- studi la funzione ottenuta, tracci il grafico;
- determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa $x = 4$;
- calcoli l'area della porzione del piano finita compresa tra il grafico della funzione e la retta d'equazione $y = -1$. Individui graficamente l'area così determinata.

Problema 2

È data la funzione $f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$ nell'intervallo dei numeri reali $0 \leq x \leq 2\pi$.

Il candidato:

- studi la funzione nell'intervallo dato, tracci il grafico;
- trovi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione nei punti di flesso, e disegni le tangenti insieme al grafico;
- trovi l'intervallo dove la funzione assume valori positivi;
- calcoli l'integrale definito della funzione $f(x)$ sull'intervallo trovato individuando graficamente l'area calcolata.

Questionario

- Semplificare al massimo l'espressione $\frac{\sqrt[3]{32} \sqrt[3]{2}}{2 \sqrt{2} \sqrt[6]{2}}$.
- Nel campo dei numeri naturali risolvere l'equazione $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 4$.
- Lanciando contemporaneamente due dadi calcolare la probabilità che la somma dei punteggi non superi 10.
- Risolvere la disequazione $2^{x+2} + 7 \cdot 2^{x-1} < 15$.
- Risolvere l'equazione $\log(x+13) - \log(x-3) = \log(x+4)$.
- Determinare i valori dei coefficienti reali p e q dell'equazione $x^2 + px + q = 0$, in modo tale che una soluzione sia $x_1 = -3 + \sqrt{5}i$. Determinare inoltre la seconda soluzione x_2 .
- Decidere il tipo della conica $5x^2 + y^2 = 10x$. Disegnare la conica nel sistema cartesiano.
- Calcolare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$.

MATURITÀ 2018

Problema 1

a) Se è pari $\frac{ax+3}{x^2-4} = \frac{-ax+3}{x^2-4}$ cioè $ax + 3 = -ax + 3$ cioè $2ax = 0$ quindi $a = 0$.

funzione $y = \frac{3}{x^2-4}$

b)

Dominio: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

Simmetrie: pari

Intersezioni: $\left[0; -\frac{3}{4}\right]$

Segno:

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
3		+	+	+
$x^2 - 4$		+	-	+
y		+	-	+

Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{\infty} = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{\infty} = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{0} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{0} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{0} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{0} = +\infty$

Asintoti: $y = 0$ $x = -2$ $x = 2$

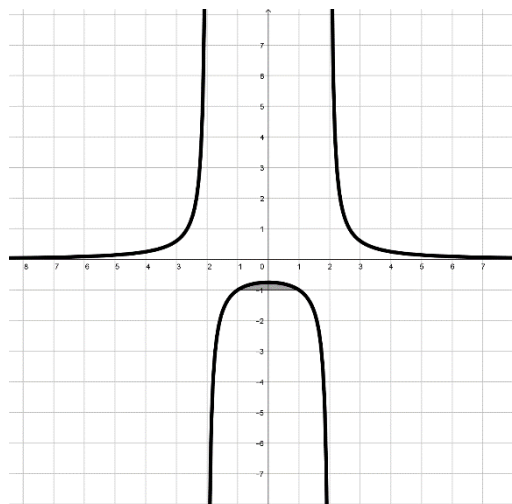
Derivata prima: $y' = -\frac{6x}{(x^2-4)^2}$ Massimo in $x = 0$

Derivata seconda: $y'' = \frac{-6(x^2-4)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (x^2-4)(-6x)}{(x^2-4)^4} =$
 $\frac{-6(x^2-4) - 2 \cdot 2x(-6x)}{(x^2-4)^3} = \frac{18x^2+24}{(x^2-4)^3}$ Nessun flesso

c) $x = 4$ $y = \frac{1}{4}$ $y' = -\frac{1}{6}$
 $y = -\frac{1}{6}x + q$ $y = -\frac{1}{6}x + \frac{11}{12}$

d) Intersezione tra retta e funzione: $\frac{3}{x^2-4} = -1$ $x = \pm 1$

1) $\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{x^2-4} + 1 \right) dx = \left[\frac{3}{4} \ln|x-2| - \frac{3}{4} \ln|x+2| + x \right]_{-1}^1 \approx 0,35$



MATURITÀ 2018

Problema 2

a)

Dominio: $[0; 2\pi]$

Simmetria: sarebbe pari, ma il dominio non è simmetrico

Intersezioni: $\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

Segno:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y		−	+	−	+	−

Limiti: $f(0) = -\frac{1}{4} \quad f(2\pi) = -\frac{1}{4}$

Asintoti: nessuno

Derivata prima: $y' = 2 \sin x \cos x$

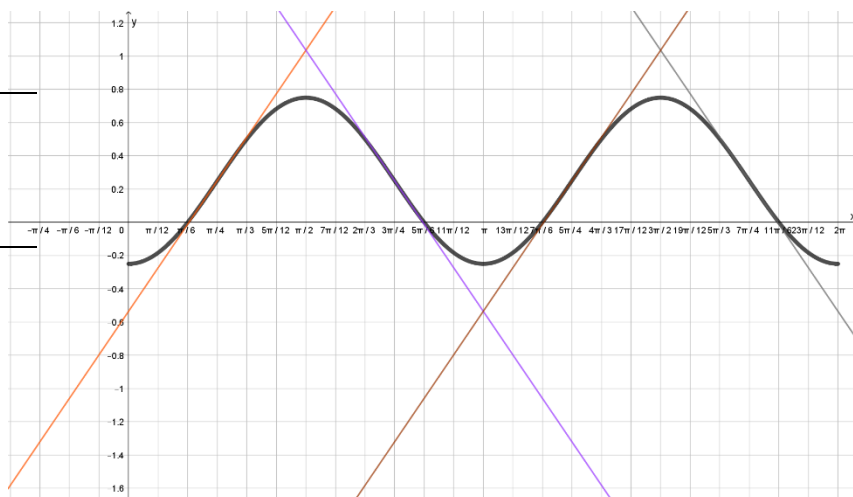
	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
y		+	−	+	−
		↗	↘	↗	↘

Derivata seconda: $y'' = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x)$

$y'' = 2(2 \cos^2 x - 1) \quad$ Flessi in $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad$ cioè $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

2) Tabella e disegno:

x	y	
0	$-\frac{1}{4}$	(minimi)
2π	$-\frac{1}{4}$	
$\frac{\pi}{6}$	0	
$\frac{5\pi}{6}$	0	
$\frac{7\pi}{6}$	0	
$\frac{11\pi}{6}$	0	
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}$	
π	$-\frac{1}{4}$	
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3}{4}$	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{1}{4}$	FLESSI



b)

MATURITÀ 2018

Ci sono 4 rette tangenti.

$$\text{Punto } x = \frac{\pi}{4} \quad y = \frac{1}{4} \quad y' = 1 \qquad y = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Punto } x = \frac{3\pi}{4} \quad y = \frac{1}{4} \quad y' = -1 \qquad y = -x + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Punto } x = \frac{5\pi}{4} \quad y = \frac{1}{4} \quad y' = 1 \qquad y = x - \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Punto } x = \frac{7\pi}{4} \quad y = \frac{1}{4} \quad y' = -1 \qquad y = -x + \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{4}$$

c) intervallo $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$

d) calcoli l'integrale definito della funzione $f(x)$ sull'intervallo trovato individuando graficamente l'area calcolata.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sin^2 x - \frac{1}{4} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{4} \right) dx = \left| \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}x \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

MATURITÀ 2018

Questionario

$$1) \frac{\sqrt[3]{32} \sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2} \sqrt[6]{2}} = 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{5}{3} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

$$2) \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 4$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 4$$

$$n = 3$$

$$n^2 - n + n^2 - 3n + 2 = 8$$

$$2n^2 - 4n - 6 = 0$$

3) La somma deve essere minore di 10. Ci sono in totale 36 possibilità, e le possibilità positive sono:

11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26 31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 51 52
53 54 61 62 63

$$\text{In totale } \frac{30}{36} = 83,33\%$$

$$2^{x+2} + 7 \cdot 2^{x-1} < 15$$

$$4 \cdot 2^x + 7 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2} < 15$$

$$2^x \left(4 + \frac{7}{2}\right) < 15$$

$$\frac{15}{2} \cdot 2^x < 15$$

$$2^x < 2$$

$$\text{L'intervallo è } x < 1$$

$$4) \log(x+13) - \log(x-3) = \log(x+4)$$

$$\log\left(\frac{x+13}{x-3}\right) = \log(x+4)$$

$$\frac{x+13}{x-3} = x+4$$

$$x+13 = (x+4)(x-3)$$

$$5) x+13 = x^2 + 4x - 3x - 12$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x = 5$$

6) La seconda soluzione sarà $x_2 = -3 - \sqrt{5}i$. L'equazione sarà $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$$(x + 3 - \sqrt{5}i)(x + 3 + \sqrt{5}i) = 0$$

$$x^2 + 6x + 14 = 0$$

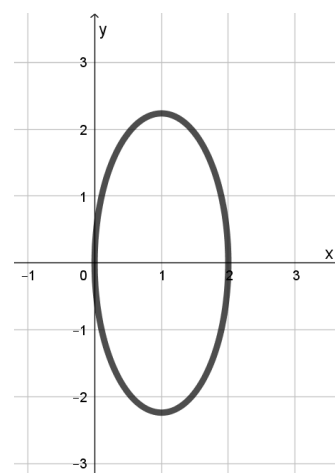
7) Decidere il tipo della conica $5x^2 + y^2 = 10x$.

$$(5x^2 - 10x + 5) + y^2 = 5$$

$$\frac{5(x-1)^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 1$$

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{5} = 1$$

Si tratta di una ellisse con centro $C[1; 0]$ e semiassi $a = 1$ $b = \sqrt{5}$



$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

MATURITÀ 2019

Problema 1

È data la famiglia di funzioni

$$f_{a,b}(x) = \frac{ax^2 + bx - 12}{2x - 3}$$

con a, b parametri reali. Il candidato:

- a) trovi i valori di a e b in modo che la funzione abbia un asintoto $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{4}$;
- b) studi l'andamento della funzione trovata e tracci il suo grafico;
- c) trovi il punto di intersezione tra i due asintoti della funzione trovata;
- d) trovi l'area della parte di piano finita delimitata dall'asse x e dalla funzione trovata.

Problema 2

Sia data la funzione

$$f(x) = (-x - 3)e^{-x}$$

Il candidato:

- a) studi l'andamento della funzione $f(x)$ e tracci il suo grafico;
- b) trovi l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 1$;
- c) trovi l'area della parte di piano finita compresa tra la funzione $f(x)$, l'asse y e l'asse x ;
- d) tracci il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$.

Questionario

- 1) Un triangolo ha lati a , $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$ con a numero reale positivo, e un angolo $\alpha = 135^\circ$. Trovare la lunghezza dei lati, sapendo che a è il lato più lungo.

- 2) Esprimere y nell'espressione

$$xy(3x - 5) + 2 = 3x - 2y$$

e semplificarla. Rappresentare sul piano cartesiano la funzione trovata.

- 3) Calcolare il valore del seguente integrale:

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx$$

- 4) Ad un concorso si possono ottenere 0, 1, 2, 3 oppure 4 punti. Tra i partecipanti, nessuno ha ottenuto 3 punti, venti hanno ottenuto 0 punti, trenta hanno ottenuto 2 punti. Considerando che la mediana e la media sono uguali a 1,5 punti, calcolare il numero dei partecipanti al concorso.

- 5) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $\log^2 x - 3 \log x = 4$

- 6) Risolvere l'equazione $\binom{k+1}{2} + \binom{k}{1} + \binom{k}{0} = 5k - 5$.

- 7) Disegnare sul piano di Gauss tutti i punti per cui vale l'equazione $|z - 2 + i| = 3$ nel campo dei numeri complessi.

- 8) In una successione aritmetica $\begin{cases} a_{11} - a_{14} = 12 \\ a_2 + a_3 = -6 \end{cases}$. Trovare il primo termine e la somma dei primi 1000 termini.

MATURITÀ 2019

Problema 1

a) $ax^2 + bx - 12 = (2x - 3)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{13}{4}\right) + R$ $ax^2 + bx - 12 = -x^2 + 8x - \frac{39}{4} + R$

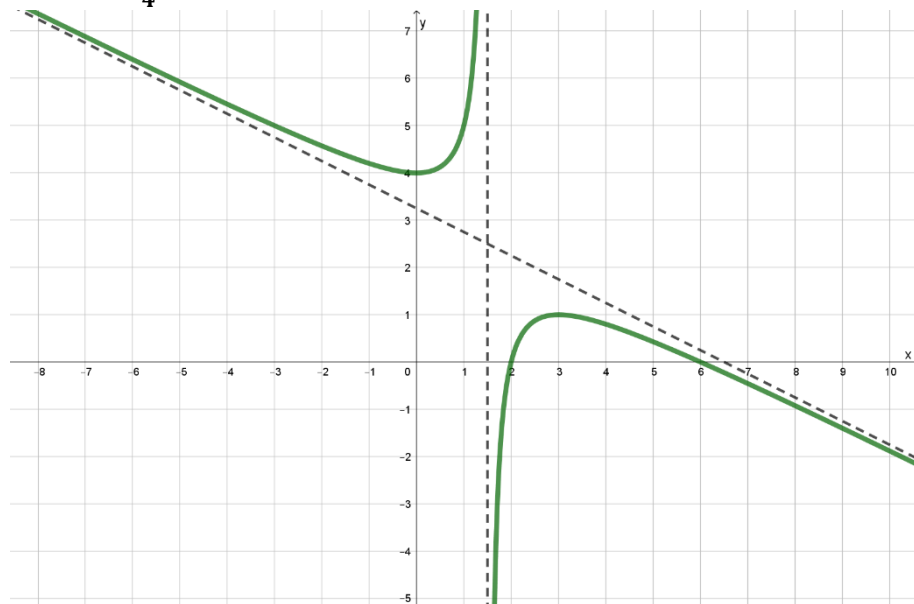
$a = -1$ $b = 8$ $R = -\frac{9}{4}$

b) $f(x) = \frac{-x^2 + 8x - 12}{2x - 3}$

$f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x}{(2x - 3)^2}$

$f''(x) = -\frac{18}{(2x - 3)^3}$

c) Punto $P\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$



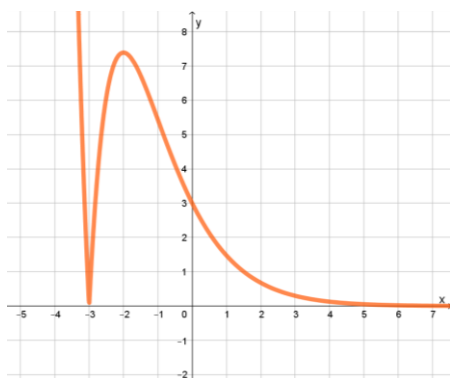
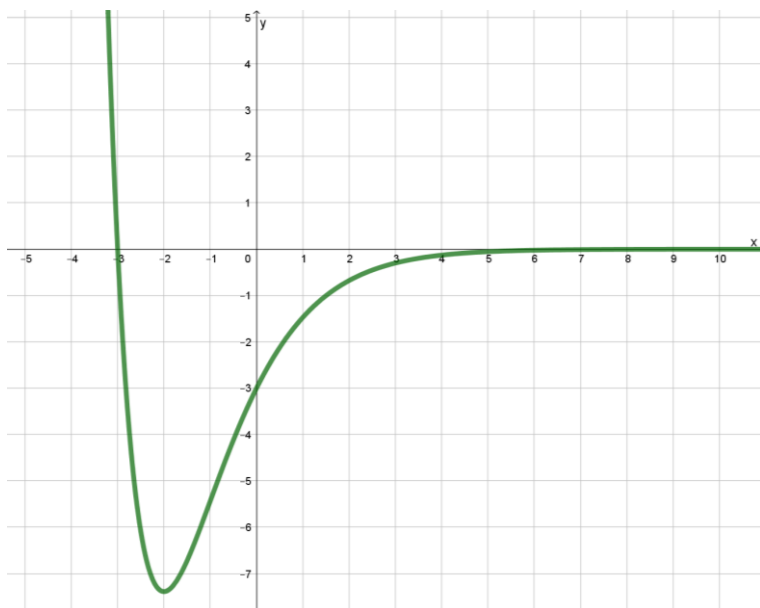
d) $\int_2^6 \frac{-x^2 + 8x - 12}{2x - 3} dx = \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{13}{4} - \frac{\frac{9}{4}}{2x - 3}\right) dx = \left|-\frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{4}x - \frac{9}{8}\ln|2x - 3|\right|_2^6 = 2,53$

Problema 2

a) $f'(x) = (x + 2)e^{-x}$
 $f''(x) = (-x - 1)e^{-x}$

b) $x = 1$ $f(1) = -\frac{4}{e}$
 $f'(1) = k = \frac{3}{e}$
 $y = \frac{3}{e}x - \frac{7}{e}$

c) $\int_{-3}^0 (-x - 3)e^{-x} dx = \text{per partes} =$
 $|(x + 4)e^{-x}|_{-3}^0 = 4 - e^3$
 L'area è circa **16,09**



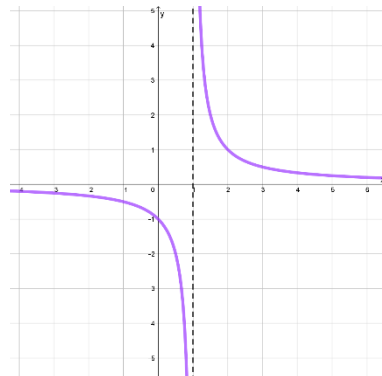
d)

MATURITÀ 2019

Questionario

1) Teorema del coseno: $a^2 = a + 2a + 2a$ $a = 5, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{10}$

2) $y = \frac{3x-2}{3x^2-5x+2} = \frac{3x-2}{(3x-2)(x-1)}$ $y = \frac{1}{x-1}$ Questo è il disegno:



3) $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \left| \frac{x - \sin x \cos x}{2} \right|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

4)

Punti	0	1	2	3	4
partecipanti	20	x	30	0	y

Mediana 1,5: significa $20 + x = 30 + y$

Media 1,5: significa $\frac{0 \cdot 20 + 1 \cdot x + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot y}{20 + x + 30 + 0 + y} = 1,5$ quindi $x = 20$ $y = 10$

5) $\log x = 4$ $x_1 = 10\,000$ $\log x = -1$ $x_2 = 0.1$

6) $\frac{k^2+k}{2} + k + 1 = 5k - 5$ $k_1 = 3$ $k_2 = 4$

7) Circonferenza di raggio 3 e centro $C[2; -1]$

8) $d = -4$ $a_1 = 3$ $a_{1000} = -3993$ $s_{1000} = -1\,995\,000$

MATURITÀ 2020

Problema 1

È data la funzione

$$f(x) = 2e^{2x} - 9e^x + 4$$

Il candidato:

- a) studi l'andamento della funzione e tracci il suo grafico;
- b) calcoli l'area della parte di piano finita compresa tra la funzione e l'asse x ;
- c) scriva l'intervallo di tutti i valori che può assumere $f(x)$;
- d) trovi l'equazione della retta tangente alla funzione nei punti di intersezione con l'asse x .

Problema 2

È dato l'insieme di funzioni di equazione

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{5}ax^5 + \frac{1}{3}bx^3 + 4x$$

con parametri a, b interi nell'intervallo $[-10; 10]$. Il candidato:

- a) calcoli il numero totale di elementi dell'insieme delle funzioni;
- b) determini il valore dei parametri a, b in modo che la funzione abbia punti stazionari in $x = -1$ e $x = -2$;
- c) studi l'andamento della funzione trovata e tracci il suo grafico;
- d) calcoli l'area della parte di piano compresa tra la funzione, la retta $x = -2$ e l'asse x .

Questionario

- 1) Trovare le dimensioni di tutti i lati, di tutti gli angoli e dell'area del triangolo (o dei triangoli) in cui $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 30^\circ$. Disegna il triangolo (i triangoli).
- 2) Trovare il punto di intersezione tra la retta $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e la retta $5x - 2y - 9 = 0$. Trovare l'angolo tra le due rette.
- 3) È data la successione geometrica $2 \quad 4x \quad 8x^2 \quad 16x^3 \quad \dots$.
Trovare il valore di x in modo che la somma di tutti gli infiniti termini della successione sia uguale a 5.
- 4) Lanciando due dadi, calcolare la probabilità:
a) che la somma dei due dadi sia al massimo 9 e almeno uno dei due dadi sia un 5;
b) che la somma dei due dadi sia al massimo 9 o almeno uno dei due dadi sia un 5.
- 5) Nell'insieme dei numeri reali risolvere l'equazione $3^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{9}$.
- 6) Usando le proprietà dei limiti calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$
- 7) Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse x la semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{6x - x^2}$.
- 8) Disegnare sul piano complesso tutti i punti per cui vale l'equazione $|z - 4i| = |z + 8|$. Formulare un'equazione in x, y che rappresenti l'insieme dei punti trovato.

MATURITÀ 2020

Problema 1 (32+11+5+12)

a) $f(x) = 2e^{2x} - 9e^x + 4$

Nessuna simmetria, dominio $(-\infty; +\infty)$

Asintoto $y = 4$

$$f'(x) = 4e^{2x} - 9e^x \quad \text{Minimo} \left[\ln \frac{9}{4}; -\frac{49}{8} \right]$$

$$f''(x) = 8e^{2x} - 9e^x \quad \text{Flesso} \left[\ln \frac{9}{8}; -\frac{115}{32} \right]$$

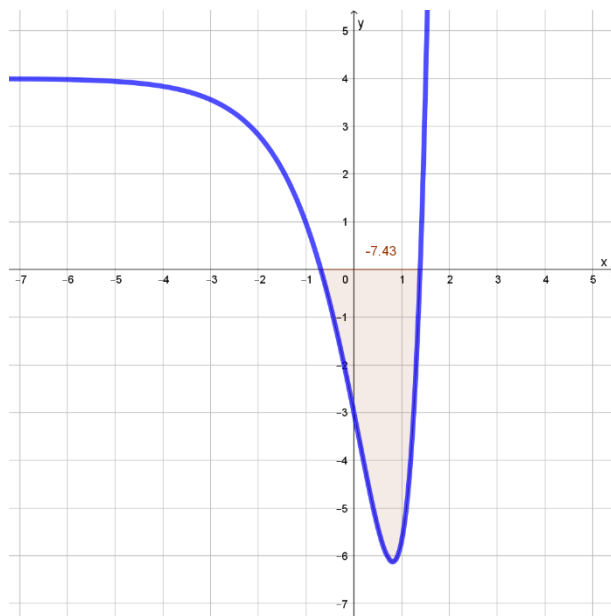
b) $\int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 4} (2e^{2x} - 9e^x + 4) dx = 12 \ln 2 - \frac{63}{4}$

L'area è circa **7,43**.

c) L'intervallo è $\left[-\frac{49}{8}; +\infty \right)$

d) $x = \ln 4, y = 0, y' = 28 \quad y = 28(x - \ln 4)$

$x = \ln \frac{1}{2}, y = 0, y' = -\frac{7}{2} \quad y = -\frac{7}{2}(x - \ln \frac{1}{2})$



Problema 2 (10+10+30+10)

a) $21 \cdot 21 = 441$ possibili funzioni.

b) $f' = ax^4 + bx^2 + 4 \quad \begin{cases} a + b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases}$

$a = 1 \quad b = -5$

c) $f = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$

$$f' = x^4 - 5x^2 + 4$$

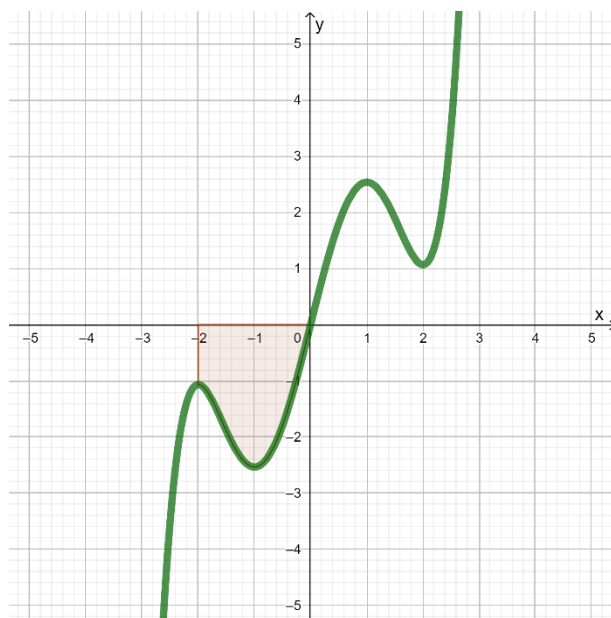
$$f'' = 4x^3 - 10x$$

Funzione dispari, senza asintoti, massimi in $x = -2$ e $x = 1$ minimi in $x = -1$ e $x = 2$

Flessi in $[0; 0] \quad \left[\sqrt{\frac{5}{2}}; 1,71 \right] \quad \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}; -1,71 \right]$

d) $\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x \right) dx =$
 $\left| \frac{1}{30}x^6 - \frac{5}{12}x^4 + 2x^2 \right|_{-2}^0 = -\frac{52}{15}$

L'area è $\frac{52}{15} \approx 3,47$



MATURITÀ 2020

Questionario

1) Si usa il teorema del seno, ci sono però due soluzioni: $\frac{\sin 30}{4} = \frac{\sin \beta}{7}$

Soluzione 1: $c = 8 \text{ cm}$, $\beta = 61^\circ$, $\gamma = 89^\circ$, $A = 14 \text{ cm}^2$

Soluzione 2: $c = 4,13 \text{ cm}$, $\beta = 119^\circ$, $\gamma = 31^\circ$, $A = 7,22 \text{ cm}^2$

2) Intersezione $P\left[\frac{37}{5}; 14\right]$ L'angolo tra le due rette è $9,16^\circ$

3) Successione $a_1 = 2$ $q = 2x$ Deve convergere $s_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} = 5$
Quindi $\frac{2}{1-2x} = 5$ $1 - 2x = \frac{2}{5}$ $2x = 1 - \frac{2}{5}$ $x = \frac{3}{10} = 0,3$

4) $P(\leq 9 \text{ e un dado } 5) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 22,22\%$ $P(\leq 9 \text{ o un dado } 5) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} \approx 91,67$

5) $3^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{9}$ significa che $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ e quindi $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$.

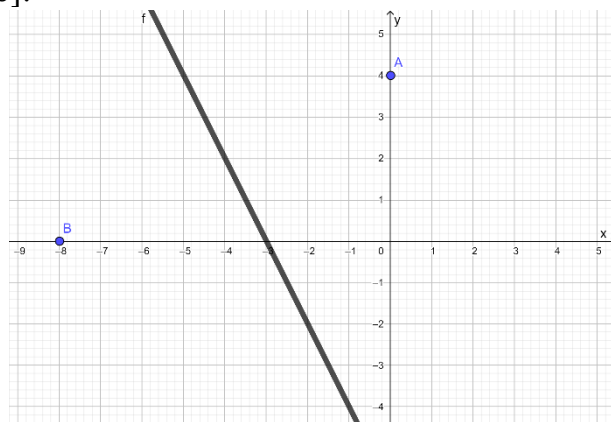
6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1$

7) Si può fare in due modi: $\pi \int_0^6 (6x - x^2) dx = \pi \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^6 = 36\pi \approx 113,1$

Oppure calcolando il volume della sfera di raggio 3: $\frac{4}{3}r^3 \cdot \pi = 36\pi$

8) I punti sono l'asse del segmento AB , dove $A[0; 4]$ e $B[-8; 0]$.

L'equazione dei punti è $y = -2x - 6$



MATURITÀ 2021

Problema 1

È data la funzione

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$$

Il candidato:

- studi la funzione e tracci il suo grafico;
- disegni il grafico della funzione $g(x) = f'(x)$;
- disegni il grafico della funzione $h(x) = f''(x)$;
- calcoli l'area della parte finita del piano limitata dai grafici delle funzioni g e h .

Problema 2

È dato l'insieme di funzioni $y = (1 - x)e^x + k$, con $k \in \mathbf{R}$.

Il candidato:

- dimostri che, qualunque sia il valore reale di k , il grafico della funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = k$;
- considerato il caso in cui il grafico ha per asintoto orizzontale l'asse delle ascisse, studi e disegni il grafico della funzione per tale valore particolare di k ;
- calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa dal grafico stesso, dall'asse delle ascisse e dall'asse delle ordinate per tale valore particolare di k ;
- determini per quali valori reali di k il grafico della funzione:
 - non interseca l'asse delle ascisse;
 - è tangente all'asse delle ascisse;
 - interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti;
 - interseca l'asse delle ascisse soltanto in un punto.

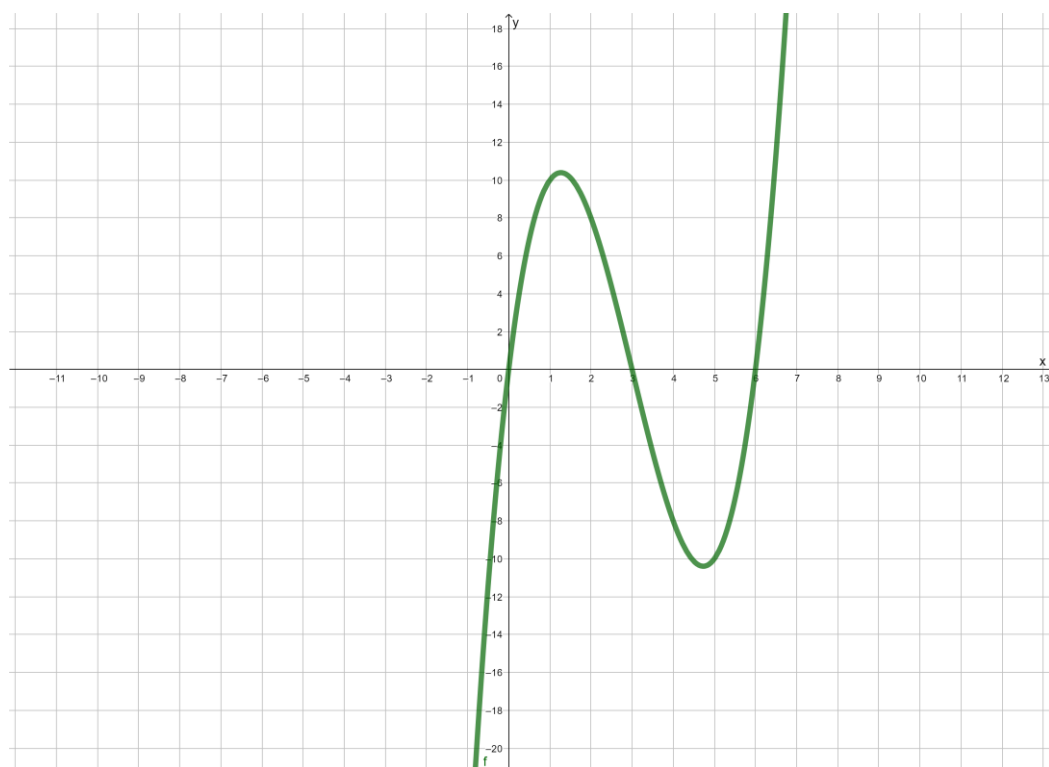
Questionario

- Trovare un numero naturale $n > 2$ per il quale l'espressione $n^2 - 1$ è un numero primo oppure dimostrare l'inesistenza di tale numero n .
- Si possono utilizzare le cifre da 0 a 9.
 - Determinare quanti codici di nove cifre si possono formare.
 - Determinare quanti sono i codici di nove cifre tutte diverse.
 - Determinare quanti sono i codici di nove cifre tutte diverse messe in ordine crescente.
- La somma di 94 numeri interi consecutivi risulta 2021. Trovare il primo e l'ultimo termine della successione di numeri.
- Trovare l'equazione generica della retta r perpendicolare alla retta $y = 2x - 3$ e passante per il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.
- Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x = 2$.
- Risolvere l'equazione $\log(2x - 9) + \log(x - 5) = \log 2x$.
- Nel campo dei numeri complessi risolvere l'equazione $2x^2 - 2x + 5 = 0$. Riportare le soluzioni sul piano di Gauss.
- Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$.

MATURITÀ 2021

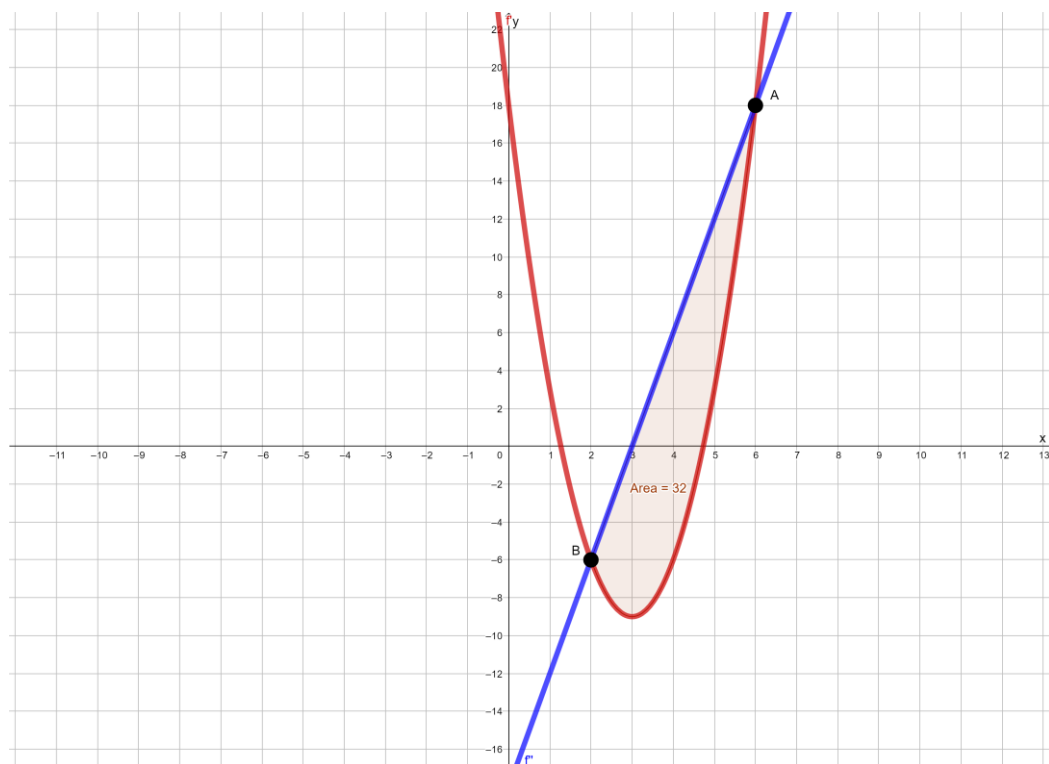
Problema 1

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$ Massimo $[3 - \sqrt{3}; 6\sqrt{3}]$ minimo $[3 + \sqrt{3}; -6\sqrt{3}]$ flesso $[3; 0]$



b) $g(x) = 3x^2 - 18x + 18$ (rosso)

c) $h(x) = 6x - 18$ (blu)



d) Intersezioni: $6x - 18 = 3x^2 - 18x + 18$ $x_1 = 2$ $x_2 = 6$

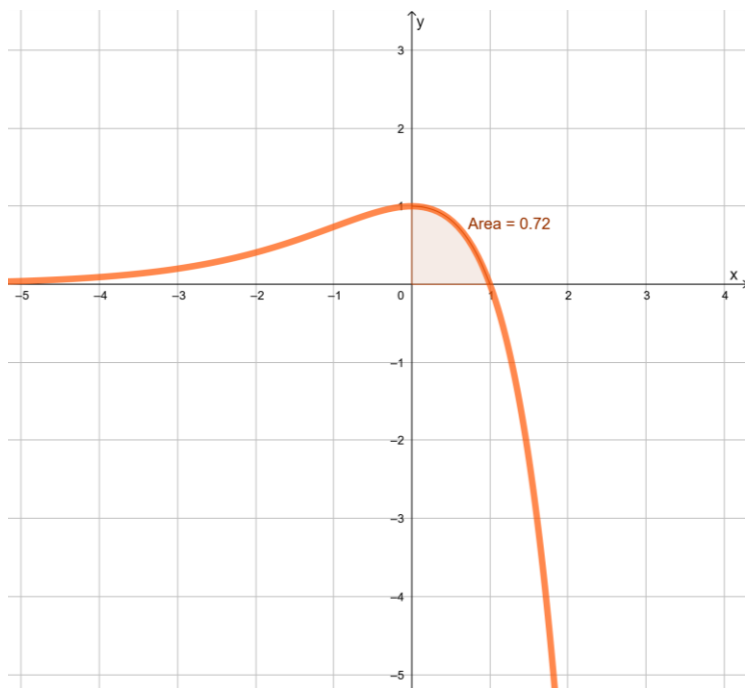
Area: $\int_2^6 (6x - 18)dx - \int_2^6 (3x^2 - 18x + 18)dx = |3x^2 - 18x|_2^6 - |x^3 - 9x^2 + 18x|_2^6 = 32$

Problema 2

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(1-x)e^x + k] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x}{e^{-x}} + k \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{-e^{-x}} + k \right) = k$ il limite è sempre k

b) Se l'asintoto è l'asse delle ascisse $y = 0$, allora $k = 0$.

$y' = -xe^x$ $y'' = (-1-x)e^x$ Massimo $[0; 1]$ Flesso $\left[-1; \frac{2}{e}\right]$



c) $\int_0^1 (1-x)e^x dx = |(1-x)e^x|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = |(1-x)e^x + e^x|_0^1 = e - 2$

d) I. $k < -1$ II. $k = -1$ III. $k \in (-1; 0)$ IV. $k \geq 0$

MATURITÀ 2021

Questionario

1) Possiamo scomporre $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$.

Quando $n > 2$ il numero $n^2 - 1$ è sempre il prodotto di due numeri interi maggiori di 1, quindi **non può essere primo**

2) a) 10^9 b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3\,628\,800$ c) $\binom{10}{9} = 10$

3) $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ sappiamo che $a_n = a_1 + 93$ e conosciamo $s_n = 2021$ $n = 94$
 $s_{94} = \frac{a_1 + a_1 + 93}{2} \cdot 94 = 2021$ $a_1 = -25$ $a_{94} = -25 + 93 = 68$

4) Il centro della circonferenza è $C[3; 2]$

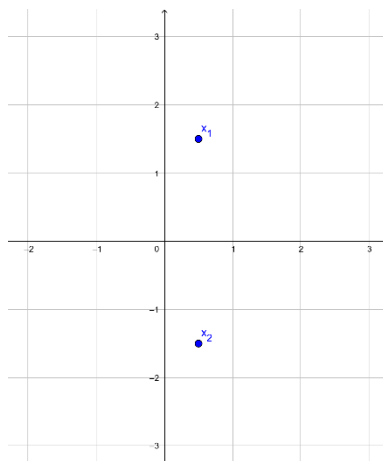
Le rette perpendicolari hanno equazione $y = -\frac{1}{2}x + b$

Passa per $C[3; 2]$ quindi $b = \frac{7}{2}$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ **Generica: $x + 2y - 7 = 0$**

5) $2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{2} \cos x = 2$ $2 \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x = 0$
 $\cos x (2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$ $\cos x = 0$ $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$
 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

6) $\log[(2x - 9)(x - 5)] = \log 2x$ $2x^2 - 19x + 45 = 2x$ $x = \frac{15}{2}$

7) $x_1 = \frac{1+3i}{2}$ $x_2 = \frac{1-3i}{2}$



8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{-\sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x}{-\cos x} = 4$

Oppure: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 1 - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x + 1)(\cos x - 1)}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} 2(\cos x + 1) = 4$

MATURITÀ 2022

Problema 1

È dato l'insieme di funzioni

$$y = \frac{ax^2 + b}{x^2 - 9}, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Il candidato:

- determini i parametri a e b in modo che il grafico della funzione abbia un asintoto orizzontale di equazione $y = 2$ e inoltre passi per l'origine del sistema di riferimento Oxy ;
- studi la funzione ottenuta disegnandone il grafico;
- trovi l'equazione della retta t tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 1$;
- calcoli l'area della porzione del piano finita compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e la retta $x = 2$.

Problema 2

È data la funzione

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

Il candidato:

- studi la funzione f trovata e tracci il suo grafico;
- disegni il grafico della funzione $g(x) = x^2 - 4x$;
- trovi i punti d'intersezione dei grafici delle funzioni f e g ;
- calcoli le aree di ognuna delle due parti del piano delimitate dai grafici delle funzioni f e g .

Questionario

- Calcolare le coordinate del punto P d'intersezione delle rette di equazioni $3x + y + 1 = 0$ e $x - 3y - 3 = 0$. Calcolare l'angolo che formano nel piano cartesiano.
- Risolvere l'equazione $3^{1-x} + 3^{1+x} = 10$.
- Trovare il dominio della funzione $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x - 2)}$.
- Nell'ambito dei numeri complessi determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 - i = 0$. Riportare le soluzioni sul piano di Gauss.
- Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C[-3; 2]$ tangente alla retta $y = x - 3$.
- Nell'ambito dei numeri naturali risolvere l'equazione $2\binom{n}{n-2} - n - 2 = 2022$.
- Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.
- Calcolare l'area della porzione del piano cartesiano Oxy racchiusa dai grafici delle funzioni $y = x^2$ e $y = -x$.

MATURITÀ 2022

Problema 1

a) Significa che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+b}{x^2-9} = a = 2$

Passa per l'origine cioè $0 = \frac{2x^2+b}{x^2-9}$ cioè $b = 0$

b) Funzione $y = \frac{2x^2}{x^2-9}$

$$y' = -\frac{36x}{(x^2-9)^2} \quad y' = \frac{108x^2+324}{(x^2-9)^3}$$

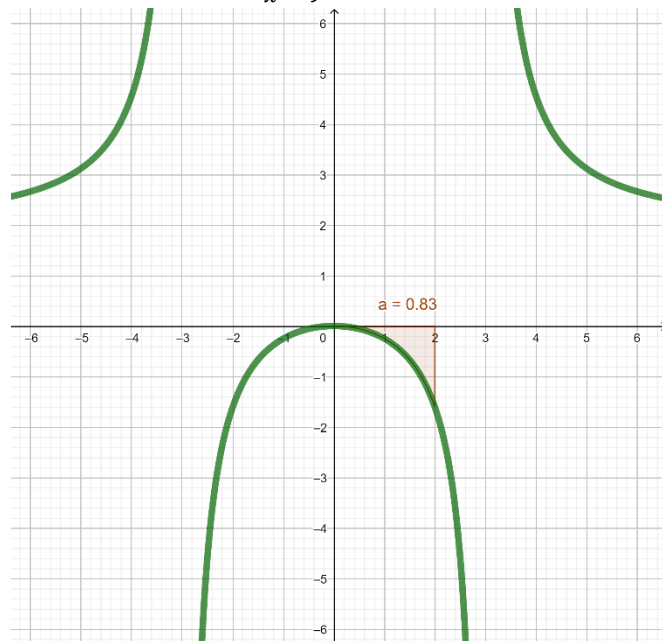
Massimo $[0; 0]$ Niente flessi

c) $y = -\frac{1}{4} \quad y' = -\frac{9}{16} \quad y = -\frac{9}{16}x + \frac{5}{16}$

d) $\int_0^2 \frac{2x^2}{x^2-9} dx = \int_0^2 \left(2 + \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x+3} \right) dx =$

$$|2x - 3 \ln|x-3| - 3 \ln|x+3||_0^2 = -0,83$$

L'area è $A = 0,83$



Problema 2

a) $M[-1; 5] \quad m[3; -27] \quad F[1; -12]$

b) Parabola rossa

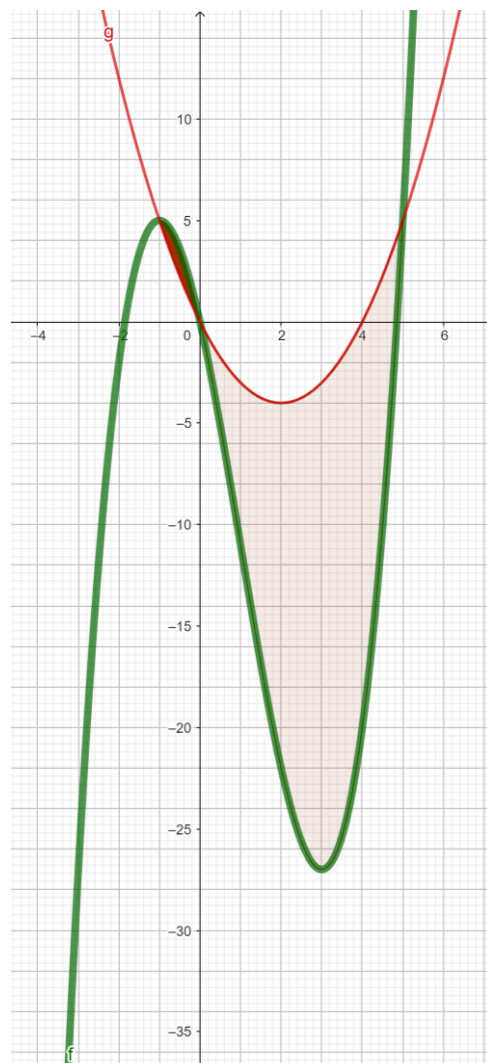
c) Intersezioni $[-1; 5] \quad [0; 0] \quad [5; 5]$

d) Parte più piccola:

$$\int_{-1}^0 (f - g) dx = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 \right|_{-1}^0 = \frac{11}{12}$$

Parte più grande:

$$\int_0^5 (g - f) dx = \left| -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right|_0^5 = \frac{875}{12}$$



MATURITÀ 2022

Questionario

- 1) Dalla prima: $y = -3x - 1$ Dalla seconda $x + 9x + 3 - 3 = 0 \quad x = 0$
Angolo 90° punto di intersezione $[0; -1]$

2) $\frac{3}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 10 \quad \frac{3}{t} + 3t = 10 \quad 3t^2 - 10t + 3 = 0 \quad t_1 = 3 \quad t_2 = \frac{1}{3}$
 $x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) \geq 0$ significa $0 < x - 2 \leq 1$ cioè $2 < x \leq 3$ **$x \in (2; 3]$**

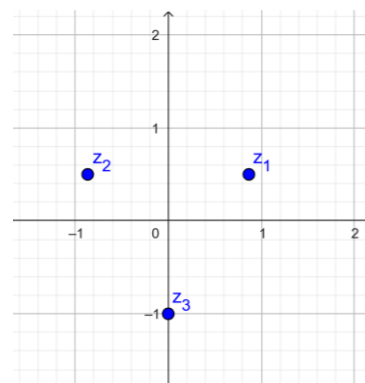
4) $z^3 = i \quad z^3 = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

Tre soluzioni

$$z_1 = 1(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = 1(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = 1(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -i$$



5) Distanza punto – retta è raggio $r = \frac{|-3-2-3|}{\sqrt{1+1}} = 4\sqrt{2}$ **$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 32$**

6) $2 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} - n - 2 = 2022 \quad n(n-1) - n - 2 = 2022 \quad n^2 - 2n - 2024 = 0$

Le due soluzioni sono $n_1 = 46 \quad n_2 = -44$ solo la prima va bene **$n = 46$**

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$

8) Punti di intersezione: $A[-1; 1] \quad B[0; 0]$

Area: $\int_{-1}^0 (-x - x^2) dx = \left| -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right|_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

L'area è $\frac{1}{6}$

MATURITÀ 2023

Problema 1

È data la famiglia di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{9}{9 - x^2} \right)^n$$

con n numero naturale non nullo. Il candidato:

- dimostri che per ogni valore di n la funzione ha sempre lo stesso punto stazionario e ne determini le coordinate;
- studi l'andamento della funzione per $n = 1$ e tracci il suo grafico;
- trovi l'equazione primitiva $F(x)$ della funzione studiata passante per il punto $B[1; 0]$;
- determini l'insieme di tutti i valori che può assumere la funzione studiata.

Problema 2

È data la funzione

$$f(x) = \ln^2 x - \ln x$$

Il candidato:

- studi l'andamento della funzione e tracci il suo grafico;
- trovi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 1$;
- calcoli l'area della parte di piano compresa tra la funzione e l'asse x (si consiglia di fare il calcolo $\int \ln^2 x \, dx - \int \ln x \, dx$).

Questionario

- Trovare l'ultima cifra (la cifra delle unità) del numero 3^{2023} e dare una spiegazione del risultato trovato.
- Calcolare l'area della parte di piano finita compresa tra la parabola $y = x^2 - 3x - 4$ e la parabola $y = -x^2 + x + 12$.
- Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$$

- Calcolare in quanti modi diversi è possibile mettere quattro monete uguali in sei portamonete diversi (anche più monete in un portamonete).
Calcolare inoltre la probabilità, mettendo le monete a caso, che vadano in quattro portamonete diversi.
- Il modulo del numero complesso $z = 2a + 4 + (a + 1)i$ è uguale a 13. Scrivere tutti i possibili valori di a .
- Una maestra porta in classe 168 ciliegie da distribuire agli alunni. Poiché tre sono assenti, gli altri ne ricevono ciascuno una in più. Da quanti bambini è composta la classe? Scrivere anche l'equazione che risolve l'esercizio.
- Scrivere l'equazione della circonferenza con centro in $C[-4; 2]$ e tangente alla retta di equazione $y = 4x + 1$. Disegnare la circonferenza sul piano cartesiano.
- Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $\cos 2x - \sin 2x = 1$ nell'intervallo $[0; 2\pi)$ dei numeri reali.

MATURITÀ 2023

Problema 1 (punti indicativi 10+33+12+5)

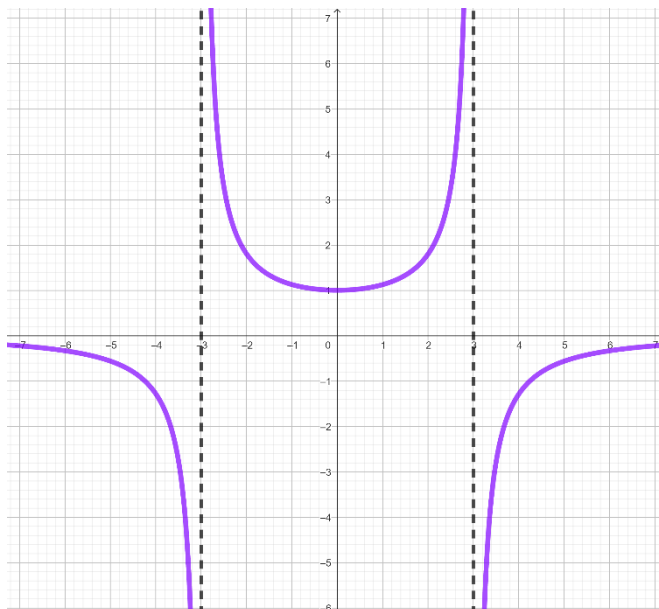
a) $y' = n \cdot \left(\frac{9}{9-x^2}\right)^{n-1} \cdot \frac{18x}{(9-x^2)^2}$

Punto stazionario $x = 0$, $y = 1$

b) $f' = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$ $f'' = \frac{54(x^2+3)}{(9-x^2)^3}$

c) $F(x) = \frac{3}{2} \ln|3+x| - \frac{3}{2} \ln|3-x| - \frac{3}{2} \ln 2$

d) L'intervallo è $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$



Problema 2 (punti indicativi 35+10+15)

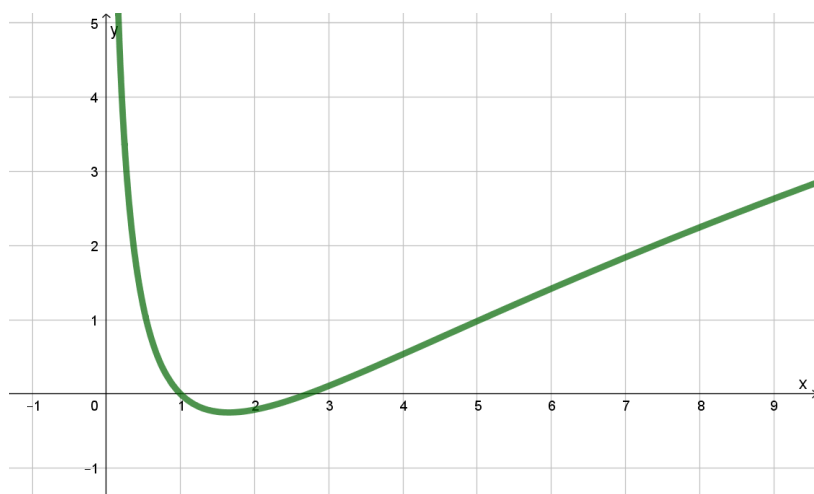
a) $f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}$

$f'' = \frac{-2 \ln x + 3}{x^2}$

Minimo $\left[\sqrt{e}; -\frac{1}{4}\right]$

Flesso $\left[\sqrt{e^3}; \frac{3}{4}\right]$

asintoto $x = 0$



b) $P[1; 0]$ $y' = k = -1$ $y = -x + 1$

c) $\int \ln^2 x \, dx = \left| \begin{matrix} f' = 1 & f = x \\ g = \ln^2 x & g' = \frac{2 \ln x}{x} \end{matrix} \right| = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$ $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$

$\int \ln^2 x \, dx - \int \ln x \, dx = \left| x \ln^2 x - 3x \ln x + 3x \right|_1^e = e - 3$ L'area è **0,28**

MATURITÀ 2023

Questionario

- 1) $3^{2023} = 3^{2020} \cdot 27 = 9^{1010} \cdot 27 = 81^{505} \cdot 27 = 81 \cdot 81 \cdot 81 \dots \cdot 27$ finisce sempre con 7.

Altra possibilità: la successione delle potenze di 3 è 3 9 27 81 243 729 2187...
La successione dell'ultima cifra è sempre 3 9 7 1 3 9 7 1... La cifra 2023 sarà 7.

- 2) $x^2 - 3x - 4 = -x^2 + x + 12$ Intersezioni in $x = 4$ e $x = -2$
 $\int_{-2}^4 [(x^2 - 3x - 4) - (-x^2 + x + 12)] dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - 2x^2 - 16x \right]_{-2}^4 = -72$ L'area è 72

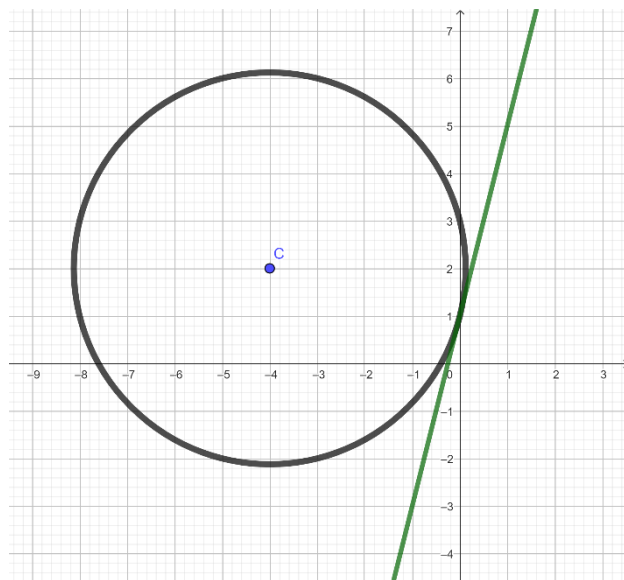
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2 \sin x \cos x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}{2} = \frac{1}{2}$

4) $\binom{9}{4} = 126$ $\frac{\binom{6}{4}}{126} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42} \cong 12\%$

5) $(2a + 4)^2 + (a + 1)^2 = 169$ $5a^2 + 18a - 152 = 0$ $a_1 = 4$ $a_2 = -\frac{38}{5}$

6) $\frac{168}{x} + 1 = \frac{168}{x-3}$ l'unica soluzione accettabile è $x = 24$ **La classe è formata da 24 studenti**

7) Distanza punto retta $\sqrt{17}$
 $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 17$



8) L'equazione diventa $2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$ si mette in evidenza e quindi:
 $x_1 = 0$ $x_2 = \pi$ $x_3 = \frac{3}{4}\pi$ $x_4 = \frac{7}{4}\pi$