# 1 OGGETTO DELLA FISICA<br>GRANDEZZE FISICHE<br>MATEMATICA IN FISICA

## Concetti fondamentali:

- Oggetto della fisica, forme della materia, campi fisici, grandezze fondamentali e derivate
- Sistema di misura SI, le unità, prefissi e sottomultipli delle unità.
- Grandezze scalari e vettoriali
- Operazioni con vettori – addizione e sottrazione dei vettori, scomposizione del vettore
- Prodotto scalare e vettoriale di due vettori.
- Calcolo differenziale e integrale nella fisica.

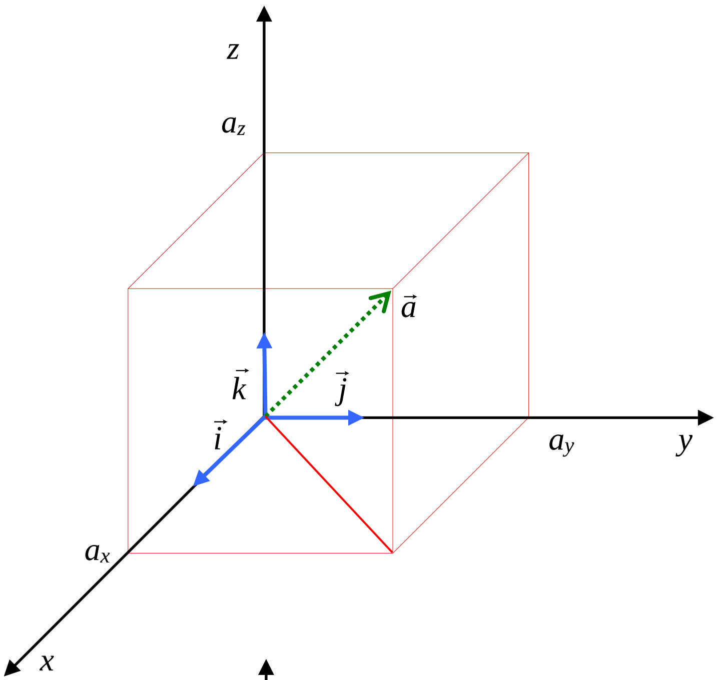
## Formule elementari:

- Sistema cartesiano di coordinate *x*, *y*, *z*

$$x = x,\quad y = y,\quad z = z$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

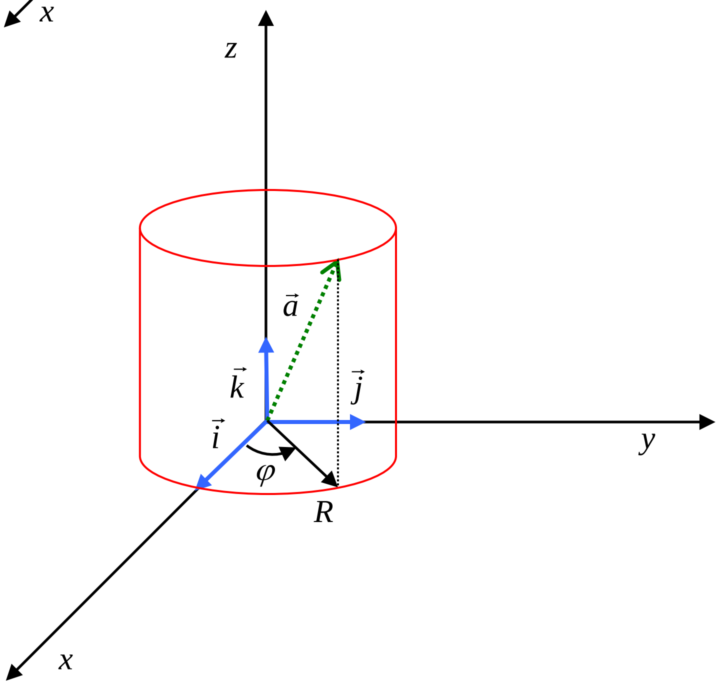
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$




- Sistema cilindrico di coordinate *R*, *z*, *φ*

$$x = R\cdot\cos\varphi,\quad y = R\cdot\sin\varphi,\quad z = z$$

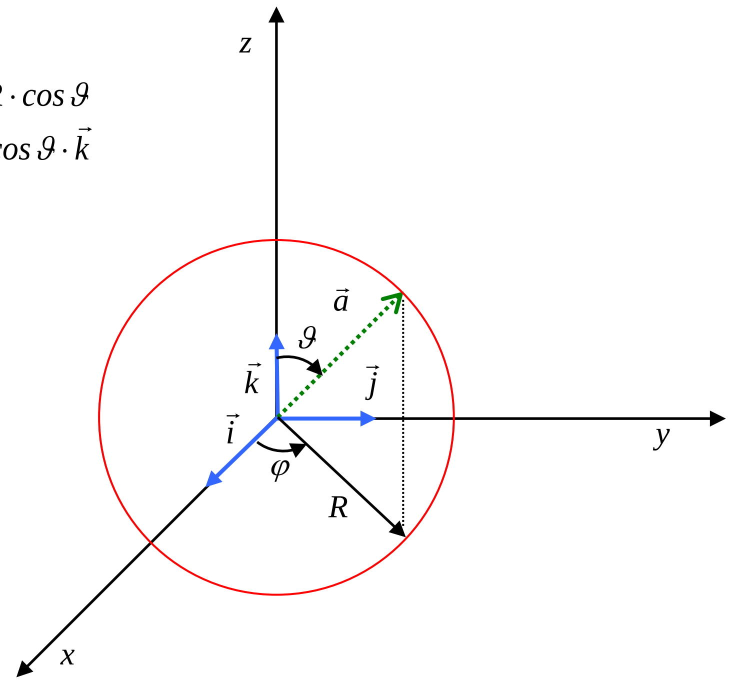
$$\vec{a} = R\cdot\cos\varphi\cdot\vec{i} + R\cdot\sin\varphi\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$



- Sistema sferico di coordinate $R$, $\varphi$, $\theta$

$$x = R \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \quad y = R \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta, \quad z = R \cdot \cos\vartheta$$

$$\vec{a} = R \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \cdot \vec{j} + R \cdot \cos\vartheta \cdot \vec{k}$$




- Vettore in sistema cartesiano:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

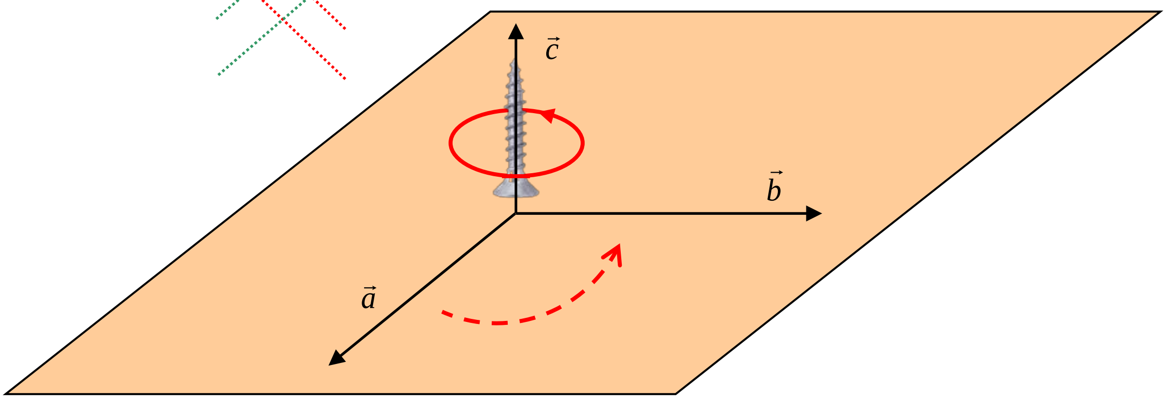
- Prodotto scalare di due vettori:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

- Prodotto vettoriale di due vettori:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \; c = a \cdot b \cdot \sin\alpha, \; \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

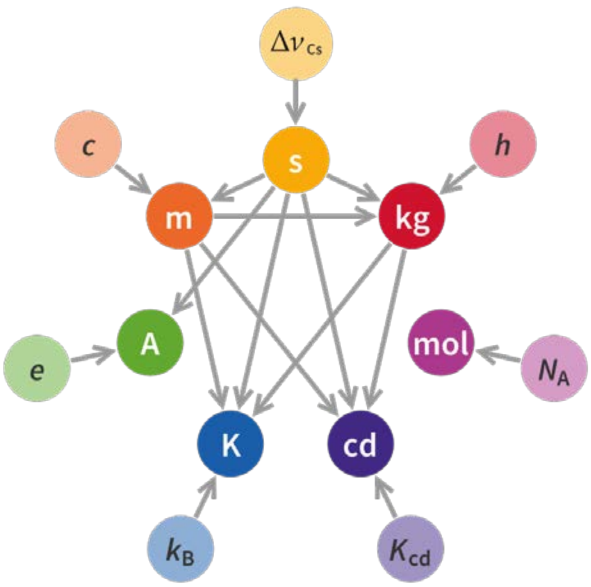
$$\det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left( a_y b_z \vec{i} + a_x b_y \vec{k} + a_z b_x \vec{j} \right) - \left( a_y b_x \vec{k} + a_z b_y \vec{i} + a_x b_z \vec{j} \right)$$



# Sistema SI – le grandezze e le unità fondamentali

| Grandezza fisica | Simbolo della grandezza fisica | Nome dell'unità SI | Simbolo dell'unità SI | Definizione dell‘unità |
|---|---|---|---|---|
| Intensità di corrente | *I, i* | ampere | A | |
| Intensità luminosa | *I* | candela | cd | |
| Lunghezza | *l, s* | metro | m | |
| Massa | *m* | chilogrammo | kg | |
| Quantità di sostanza | *n* | mole | mol | |
| Temperatura termodinamica | *T* | kelvin | K | |
| Tempo | *t* | secondo | s | |

## Dipendenza reciproca tra le unità fondamentali



## Calcoli di esercizio:

1. Esprimere i due vettori $\vec{a}, \vec{b}$ (*fig.1*) tramite i versori nel sistema cartesiano. Determinare la somma $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ e le differenze $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$.

   [$\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j}; \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j}; \vec{c} = 9\vec{i} + 8\vec{j}; d = \vec{i} - 4\vec{j}; \vec{e} = -\vec{i} + 4\vec{j}$]

2. Determinare i vettori di posizione dei centri dei lati del triangolo *ABC* (*fig. 2*).

   [$\vec{a} = 5{,}5\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{b} = 3{,}5\vec{i} + 3{,}5\vec{j}; \vec{c} = 3\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$]

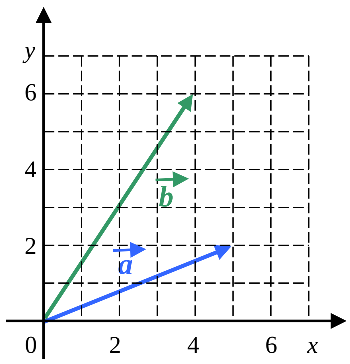


*Fig. 1*

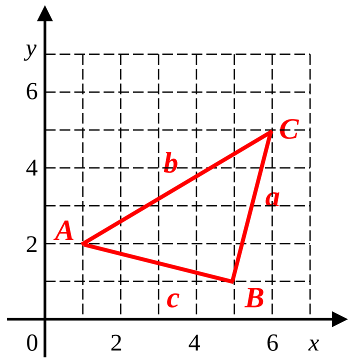


*Fig. 2*

3. Determinare il prodotto scalare $c$ e vettoriale $\vec{d}$ dei vettori $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

   [$c = 10; \vec{d} = 22\vec{i} - 4\vec{j} - 10\vec{k}; d = 24{,}5$]

4. Determinare l'angolo dei vettori $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

   [26,9°]

5. Determinare il lavoro di una forza $\vec{F} = (5\,\mathrm{N})\vec{i} + (2\,\mathrm{N})\vec{k}$ che sposta un corpo di tratto $\Delta\vec{s} = (20\,\mathrm{m})\vec{i} + (10\,\mathrm{m})\vec{k}$.

   [120 J]

6. Determinare l'area del parallelogrammo in *fig. 3* e l'angolo $\alpha$ dei vettori $\vec{a}, \vec{b}$.

   [$S = 19$; $\alpha = 64{,}6°$]

7. Determinare il momento $\vec{M}$ di forza $\vec{F}$ agente nel punto *A* rispetto all'origine del sistema (*fig. 4*).

   [$\vec{M} = -(15\,\mathrm{Nm})\vec{k}; M = 15\,\mathrm{Nm}$]

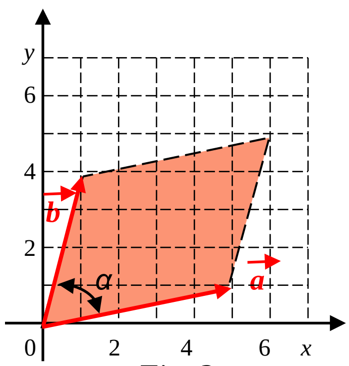


*Fig. 3*

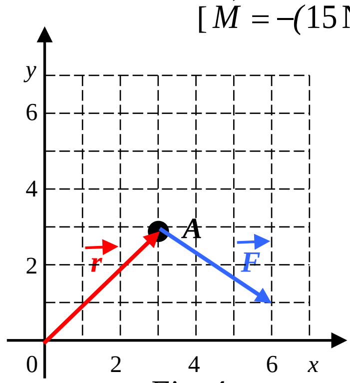


*Fig. 4*

8. Determinare il lavoro meccanico eseguito durante uno spostamento di un corpo dal punto *A* al punto *B* e dal punto *A* al punto *C* (*fig. 5*) per l'effetto di una forza costante $\vec{F}$ .

[$W_{AB}$ = 16 J; $W_{AC}$ = 0]

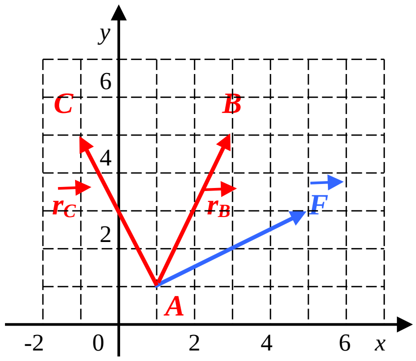



*Fig. 5*

9. Determinare il vettore della forza risultante se al punto materiale agisce una forza $\vec{F}_1$ ($F_1$ = 9 *N*) e una forza $\vec{F}_2$ ($F_2$ = 6 *N*). Il vettore $\vec{F}_1$ forma con il vettore $\vec{F}_2$ l'angolo di *60°*.

[$F_R$ = 13 *N*]

## Regole elementari del calcolo differenziale

| | | |
|---|---|---|
| Costante | $\boldsymbol{y = k}$<br>$y = 10$ | $\boldsymbol{y' = 0}$<br>$y' = 0$ |
| Moltiplicazione di una costante e una funzione | $\boldsymbol{y = c \cdot f(x)}$<br>$y = 10 \cdot x^3$<br>$y = 5 \cdot \sin x$ | $\boldsymbol{y' = c \cdot f'(x)}$<br>$y' = 30 \cdot x^2$<br>$y' = 5 \cdot \cos x$ |
| Addizione e sottrazione di due funzioni | $\boldsymbol{y = c_1 \cdot f(x) \pm c_2 \cdot g(x)}$<br>$y = 4 \cdot \cos x + 2 \cdot x^2$<br>$y = 10 - 5 \cdot x^4$ | $\boldsymbol{y' = c_1 \cdot f'(x) \pm c_2 \cdot g'(x)}$<br>$y' = -4 \cdot \sin x + 4 \cdot x$<br>$y' = -20 \cdot x^3$ |
| Moltiplicazione di due funzioni | $\boldsymbol{y = f(x) \cdot g(x)}$<br>$y = x^3 \cdot \sin x$<br>$y = 10 \cdot x \cdot \cos x$ | $\boldsymbol{y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$<br>$y' = 3 \cdot x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$<br>$y' = 10 \cdot \cos x - 10 \cdot x \cdot \sin x$ |
| Divisione di due funzioni | $\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)}}$<br>$y = \frac{4 \cdot x^2}{\sin x}$ | $\boldsymbol{y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$<br>$y' = \frac{8 \cdot x \cdot \sin x - 4 \cdot x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$ |
| Una funzione composta | $\boldsymbol{y = f(g(x))}$<br>$y = (5 - x)^2$<br>$y = 2 \cdot \sin(5 \cdot x)$ | $\boldsymbol{y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$<br>$y' = -2 \cdot (5 - x)$<br>$y' = 10 \cdot \cos(5 \cdot x)$ |
| Derivate di alcune funzioni | $\boldsymbol{y = x^n}$ | $\boldsymbol{y' = nx^{n-1}}$ |
| | $\boldsymbol{y = \sin x}$ | $\boldsymbol{y' = \cos x}$ |
| | $\boldsymbol{y = \cos x}$ | $\boldsymbol{y' = -\sin x}$ |
| | $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$ | $\boldsymbol{y' = \frac{1}{\cos^2 x}}$ |
| | $\boldsymbol{y = \mathrm{cotg}\, x}$ | $\boldsymbol{y' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$ |
| | $\boldsymbol{y = e^x}$ | $\boldsymbol{y' = e^x}$ |
| | $\boldsymbol{y = a^x}$ | $\boldsymbol{y' = a^x \ln a}$ |
| | $\boldsymbol{y = \ln x}$ | $\boldsymbol{y' = \frac{1}{x}}$ |
| | $\boldsymbol{y = \log_a x}$ | $\boldsymbol{y' = \frac{1}{x \ln a}}$ |

GYMNÁZIUM
PRAHA 8 Ústavní 400

**Calcoli di esercizio:**

1. Calcolare la derivata:

a) $y = 2 + x - x^2$

b) $y = (x-2)(x-3)$

c) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

d) $y = sin(3x+5)$

e) $y = ln\, \mathrm{tg}\, x$

f) $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

g) $y = \dfrac{1}{ln\, x}$

2. Determinare la velocità a l'accelerazione di un punto materiale sapendo l'equazione della traiettoria del punto:

a) $s = 4t^2 + 5t + 10$

$[\, v = 8t + 5;\, a = 8\,]$

b) $h = \dfrac{1}{2} g t^2$

$[\, v = gt;\, a = g\,]$

c) $h = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$

$[\, v = v_0 - gt;\, a = -g\,]$

3. Determinare la velocità e l'accelerazione del moto armonico sapendo l'equazione dell'elongazione:

a) $y(t) = y_m \sin \omega t$

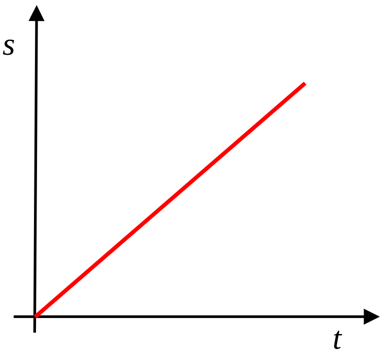
$[\, v(t) = \omega y_m \cos \omega t;\, a(t) = -\omega^2 y_m \sin \omega t\,]$

b) $y(t) = 0{,}2 \sin 10\pi t$

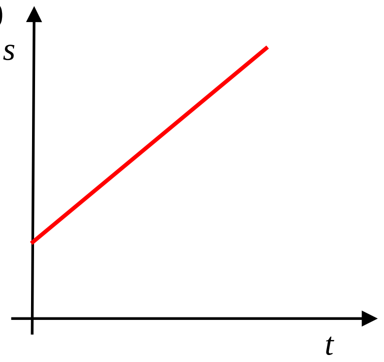
$[\, v(t) = 2\pi \cos 10\pi t;\, a(t) = -20\pi^2 \sin 10\pi t\,]$

4. Determinare graficamente l'andamento della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo per i dati moti:

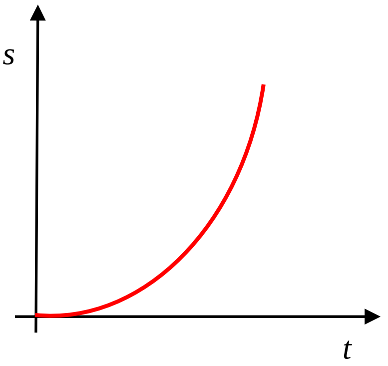
a)



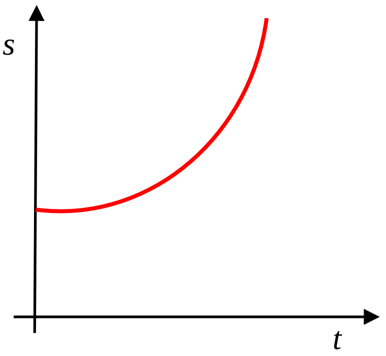

b)



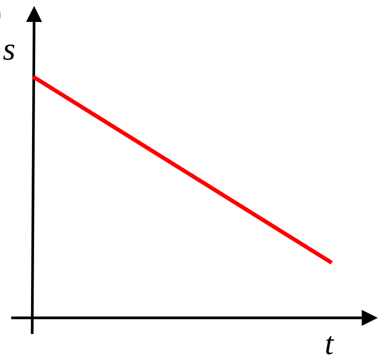

c)



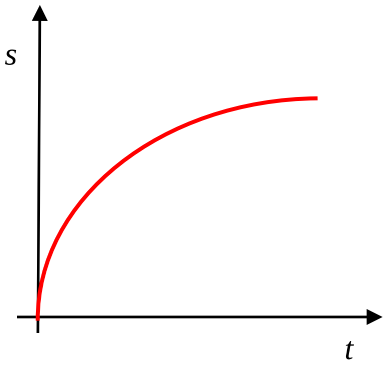

d)



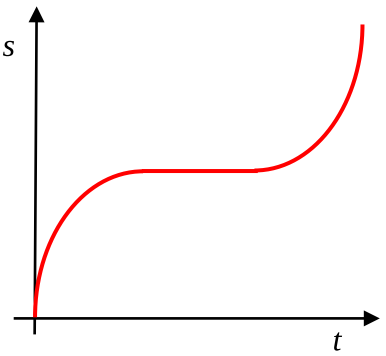

e)




f)




g)



## Regole elementari del calcolo integrale

| | | |
|---|---|---|
| Definizione | $\boldsymbol{F'(x)=f(x)\Rightarrow}$<br>$(\sin x)'=\cos x\Rightarrow$ | $\boldsymbol{\int f(x)dx=F(x)+k}$<br>$\int \cos x\,dx=\sin x+k$ |
| Moltiplicazione di una costante e di una funzione | $\boldsymbol{y=a\,f(x)}$<br>$y=5\cdot x$ | $\boldsymbol{\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx=a\,F(x)+k}$<br>$\int 5\cdot x\,dx=5\cdot\int x\,dx=5\cdot\frac{x^2}{2}+k$ |
| Addizione e sottrazione di due funzioni | $\boldsymbol{y=a\,f(x)\pm b\,g(x)}$<br>$y=2\cdot\cos x\pm 5\cdot e^x$ | $\boldsymbol{\int [a\,f(x)\pm b\,g(x)]dx=a\int f(x)dx\pm b\int g(x)dx=a\,F(x)+b\,G(x)+k}$<br>$\int [2\cdot\cos x\pm 5\cdot e^x]dx=2\cdot\int \cos x\,dx\pm 5\cdot\int e^x\,dx=2\cdot\sin x\pm 5\cdot e^x+k$ |
| Integrali di alcuni funzioni | $\boldsymbol{y=k}$ | $\boldsymbol{\int a\,dx=a\,x+k}$ |
| | $\boldsymbol{y=x^n}$ | $\boldsymbol{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+k}$ |
| | $\boldsymbol{y=\frac{1}{x}}$ | $\boldsymbol{\int \frac{dx}{x}=\ln x+k}$ |
| | $\boldsymbol{y=\cos x}$ | $\boldsymbol{\int \cos x\,dx=\sin x+k}$ |
| | $\boldsymbol{y=\sin x}$ | $\boldsymbol{\int \sin x\,dx=-\cos x+k}$ |
| | $\boldsymbol{y=e^x}$ | $\boldsymbol{\int e^x dx=e^x+k}$ |
| | $\boldsymbol{y=a^x}$ | $\boldsymbol{\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}}$ |
| Definizione dell’integrale definito | $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$ | |

## Calcoli di esercizio:

1. Calcolare l'integrale:

a) $\int (x^5 - 4x^3)\, dx$

b) $\int \left(\frac{1-x^2}{x}\right) dx$

c) $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \sin \omega t\, dt$

e) $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

2. Determinare l'equazione della velocità e dello spazio percorso del moto di un punto materiale sapendo l'equazione dell'accelerazione:

a) $a = 0$

[$v = v_0$; $s = v_0 t$]

b) $a = 5$

[$v = v_0 + 5t$; $s = s_0 + v_0 t + 2{,}5t^2$]

c) $a = -g$

[$v = v_0 - gt$; $h = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$]

3. Quanto grande è la carica elettrica che passa attraverso un conduttore in tempo di 5 s se l'intensità della corrente elettrica aumenta in modo lineare da nulla a 10 mA.

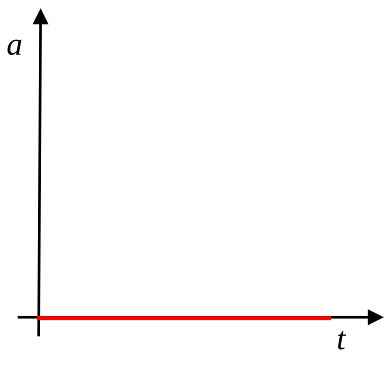
[0,025 C]

4. Determinare il lavoro necessario per una deformazione di una molla di 20 cm. Costante di elasticità della molla $k$ = 100 N/m.

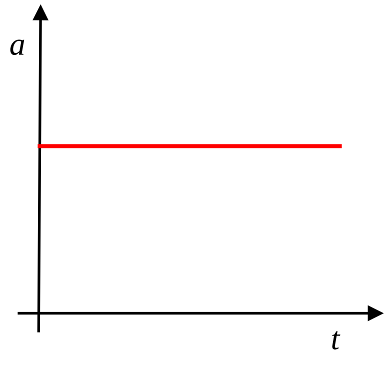
[4 J]

5. Determinare graficamente l'andamento della velocità e dello spazio in funzione del tempo per i dati moti:

i)

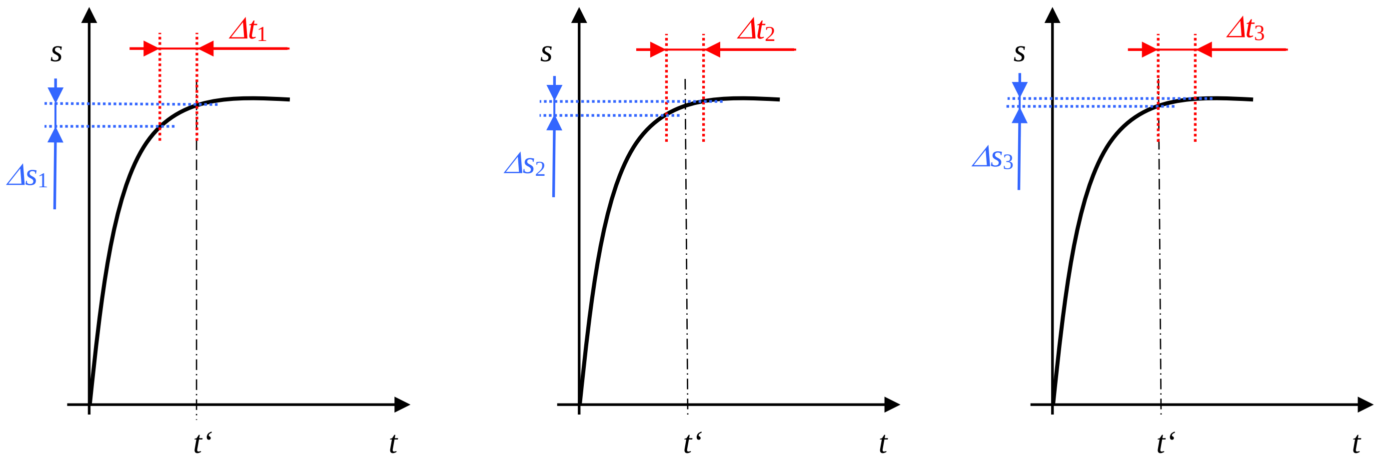



j)



## CONCETTO E SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

**Quale è la velocità istantanea nel tempo *t* = *t*‘?**




$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \qquad v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} \qquad v_3 = \frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$$

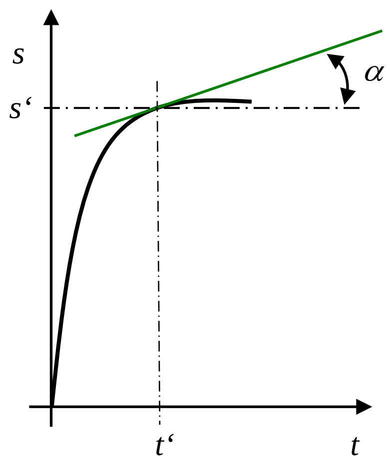
$$\Delta s_1 > \Delta s_2 > \Delta s_3$$

$$v_1 > v_2 > v_3$$

**?**

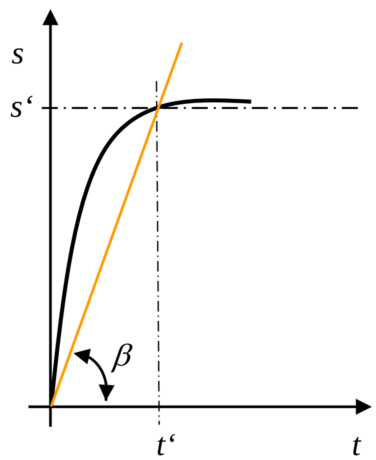
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t')}{\Delta t} = \frac{ds(t')}{dt} = s'(t') = \dot{s}(t')$$

*Leggiamo:* la velocità istantanea è uguale alla derivata dello spazio percorso *s* rispetto al tempo *t*.




$$tg\alpha = v = \frac{ds(t')}{dt} = s'(t')$$

la velocità istantanea nel tempo *t*‘



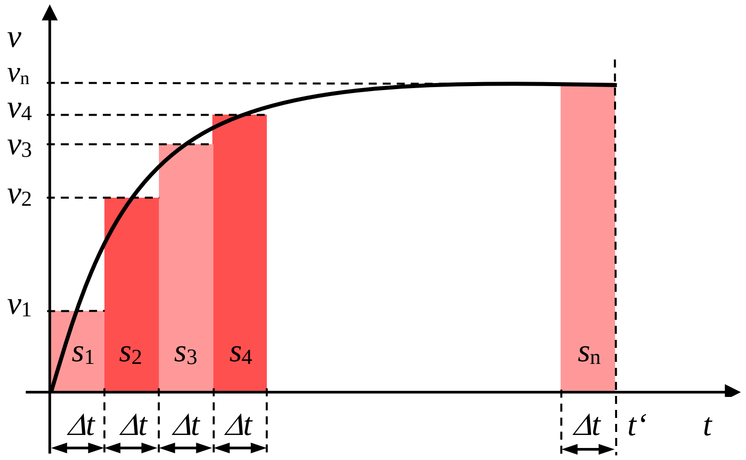

$$tg\beta = v_m = \frac{s(t')}{t'}$$

la velocità media nel tempo *t*‘

## CONCETTO E SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL CALCOLO INTEGRALE

**Quale è lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t$ ?**

$$v \approx \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s(t) \approx v \cdot \Delta t$$




**Quale è lo spazio percorso nel tempo $t'$ ?**

$$s(t') \approx v_1 \cdot \Delta t + v_2 \cdot \Delta t + v_3 \cdot \Delta t + v_4 \cdot \Delta t + \ldots v_n \cdot \Delta t = \sum_1^n v_i \cdot \Delta t$$

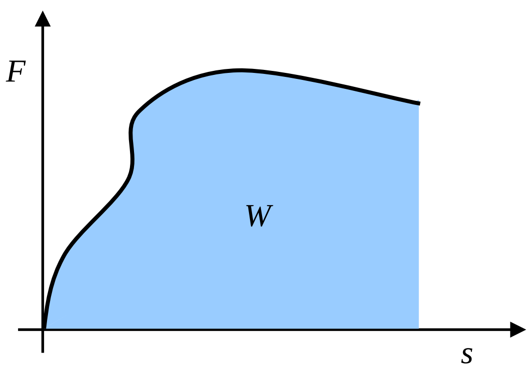
**Precisamente:**

$$v = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow ds(t) = v \cdot dt$$

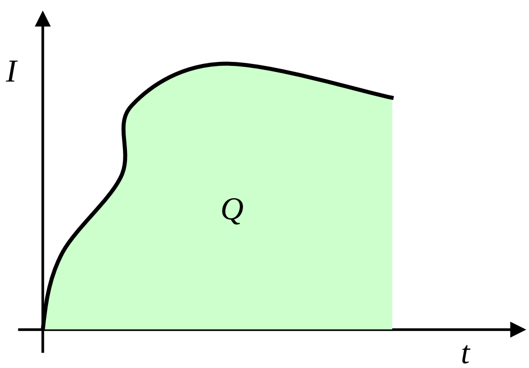
$$s(t') = v_1 \cdot dt + v_2 \cdot dt + v_3 \cdot dt + v_4 \cdot dt + \ldots v_\infty \cdot dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_1^\infty v_i \cdot \Delta t = \int_0^{t'} v(t) \cdot dt$$

---

**Altri esempi del calcolo integrale:**




$$W = \int F(s) \cdot ds$$




$$Q = \int I(t) \cdot dt$$