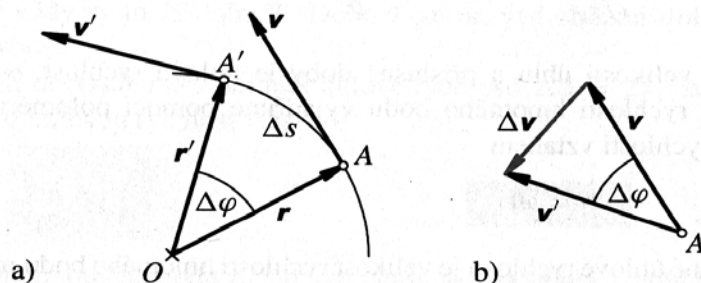


Úlohy

- 1 Určete úhlovou rychlost hřídele, který koná 120 otáček za minutu.
[12,6 rad · s⁻¹]
- 2 Řemenice elektromotoru má poloměr 3 cm a pohání řemenovým pohonem kolo o poloměru 15 cm. S jakou frekvencí se otáčí toto kolo, je-li frekvence otáček elektromotoru 50 Hz?
[10 Hz]
- 3 Jak velkou rychlostí se pohybují body na zemském rovníku? Poloměr Země je 6 378 km, úhlová rychlost otáčení Země je 7,29 · 10⁻⁵ rad · s⁻¹.
[465 m · s⁻¹]

2.11 Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

Při rovnoměrném pohybu po kružnici se velikost jeho rychlosti nemění, mění se však směr rychlosti. Rychlost $\mathbf{v}$ jako vektor tedy není konstantní, má jen stálou velikost v . Mění-li se vektor rychlosti, znamená to, že hmotný bod má zrychlení.



2-36 Změna rychlosti hmotného bodu

Na obr. 2-36a je nakreslena část trajektorie hmotného bodu, který koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Za dobu Δt se hmotný bod přemístil z polohy A do polohy A', rychlost se změnila z $\mathbf{v}$ na $\mathbf{v}'$, přičemž velikost rychlosti se nezměnila, $v = v'$. Průvodič r hmotného bodu opsal za dobu Δt úhel $\Delta\varphi$, pro který platí $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Předpokládejme, že doba Δt je velmi malá. Zrychlení je podle definice podíl změny rychlosti, která nastala za dobu Δt , a této doby, tedy

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Změna vektoru rychlosti je $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. Vektor $\Delta\mathbf{v}$ zkonstruujeme tak, že přeneseme vektor $\mathbf{v}'$ z bodu A' do bodu A (obr. 2-36b). Vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}'$ spolu svírají stejný úhel $\Delta\varphi$ jako příslušné průvodiče r a r' . Za předpokladu, že úhel $\Delta\varphi$ je velmi malý, je $\Delta\varphi = |\Delta\mathbf{v}|/v = \Delta s/r$. Velikost změny rychlosti můžeme tedy vyjádřit vztahem $|\Delta\mathbf{v}| = (\Delta s/r)v$. Pro velikost zrychlení platí vztah

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{v}{r}.$$

Podílem dráhy a času je dána velikost okamžité rychlosti, tedy $v = \Delta s/\Delta t$. Dosazením do vztahu pro zrychlení dostaneme

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

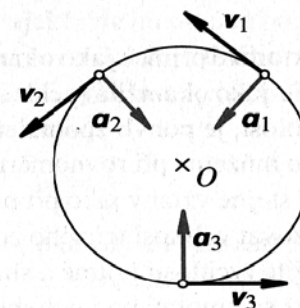
Použijeme-li vztah $v = \omega r$, můžeme velikost zrychlení vyjádřit pomocí úhlové rychlosti vztahem $a = \omega^2 r$.

Z obr. 2-36b je zřejmé, že pro velmi malý úhel $\Delta\varphi$ je změna rychlosti $\Delta\mathbf{v}$ kolmá k rychlosti $\mathbf{v}$. Zrychlení má směr změny rychlosti, je tedy rovněž kolmé k okamžité rychlosti. U rovnoměrného pohybu po kružnici směřuje toto zrychlení do středu kružnice, po níž se hmotný bod pohybuje, nazýváme je proto **dostředivé zrychlení** a označujeme je $\mathbf{a}_d$.

Pro velikost dostředivého zrychlení platí vztah

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Zrychlení hmotného bodu při rovnoměrném pohybu po kružnici směřuje stále do středu kružnice. Jeho velikost je konstantní, směr se však neustále mění (obr. 2-37).



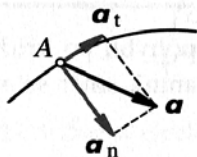
2-37 Zrychlení při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici směřuje stále do středu kružnice

Úlohy

- 1 Kolo o poloměru 0,45 m se rovnoměrně otáčí s frekvencí 6,5 Hz. Vypočítejte úhlovou rychlost kola, velikost rychlosti bodů na jeho obvodu a velikost jejich zrychlení. $[41 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 750 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$
- 2 Automobil projíždí zatáčkou o poloměru 100 metrů stálou rychlostí $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jak velké je jeho zrychlení? $[4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$
- 3 Kolo o poloměru r se otáčí úhlovou rychlostí ω . Body na obvodu kola mají rychlost o velikosti v a zrychlení o velikosti a . Jak velkou rychlost a jak velké zrychlení mají body, které jsou ve vzdálenosti $r/2$ od osy otáčení? $[v/2, a/2]$

2.12 Zrychlení při nerovnoměrném křivočarém pohybu

V mnoha případech koná hmotný bod nerovnoměrný pohyb po kružnici. Bod na obvodu roztáčejícího se kola se pohybuje zrychleně, bod na obvodu zastavujícího kola se pohybuje zpomaleně. Při takovém pohybu se mění nejen směr rychlosti, ale také její velikost. Celkové zrychlení $\mathbf{a}$ hmotného bodu pak můžeme rozložit na dvě navzájem kolmé složky: na **tečné zrychlení** $\mathbf{a}_t$, které vyjadřuje **změnu velikosti rychlosti**, a **normálové zrychlení** $\mathbf{a}_n$, které vyjadřuje **změnu směru rychlosti** (obr. 2-38).



2-38 Tečné a normálové zrychlení

Tečné zrychlení $\mathbf{a}_t$ leží na stejné vektorové přímce jako okamžitá rychlost $\mathbf{v}$. Má-li tečné zrychlení stejný směr jako okamžitá rychlost, je pohyb zrychlený, má-li opačný směr než rychlost, je pohyb zpomalený. Pro velikost rychlosti a dráhu hmotného bodu můžeme při rovnoměrně zrychleném nebo zpomaleném pohybu použít stejné vztahy jako při přímočarém pohybu, musíme však do vztahů dosazovat velikost tečného zrychlení a_t .

Normálové zrychlení $\mathbf{a}_n$ je k okamžité rychlosti kolmé a směřuje stále do středu kruhového oblouku, po němž se hmotný bod pohybuje, je tedy

totožné s dostředivým zrychlením $\mathbf{a}_d$. Velikost normálového zrychlení není při nerovnoměrném pohybu po kružnici konstantní, neboť se mění velikost okamžité rychlosti, mění se také úhlová rychlost pohybu.

Celkové zrychlení hmotného bodu je vektorovým součtem tečného a normálového zrychlení:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

Známe-li velikosti a_t a a_n obou složek zrychlení, vypočteme velikost celkového zrychlení pomocí Pythagorovy věty:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Úlohy

- 1 Uveďte příklady pohybů, u nichž je a) tečné zrychlení nulové a normálové nenulové, b) tečné zrychlení nenulové a normálové nulové, c) celkové zrychlení nulové.
- 2 Jak velké je celkové zrychlení hmotného bodu, má-li jeho tečné zrychlení velikost $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a normálové zrychlení velikost $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$? $[10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$

Shrnutí učiva 2. kapitoly

Kinematika popisuje pohyb hmotného bodu bez ohledu na jeho příčiny. **Hmotným bodem** nahrazujeme těleso, jehož tvar a rozměry nejsou při daném pohybu podstatné.

Poloha hmotného bodu je ve zvolené **vztažné soustavě** určena **souřadnicemi bodu**. Geometrická čára, kterou hmotný bod při pohybu opisuje, je **trajektorie** hmotného bodu. Délka trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu, je **dráha** s .

Průměrná rychlost v_p je podíl dráhy s a času t , za který hmotný bod tuto dráhu urazil:

$$v_p = \frac{s}{t}$$

Velikost okamžité rychlosti určíme jako podíl dráhy Δs a velmi malé doby Δt , za kterou hmotný bod tuto dráhu urazil. Okamžitá rychlost

Situace je znázorněna na obr. C3-1. Střela urazí rovnoměrným přímočarým pohybem za dobu t dráhu

$$s = vt,$$

za tutéž dobu se kotouče otočí o úhel

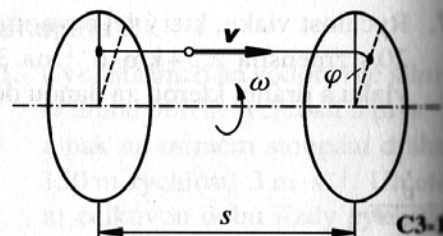
$$\varphi = \omega t = 2\pi f t.$$

Rychlost střely vypočteme ze vztahu $v = s/t$, do kterého dosadíme $t = \varphi/2\pi f$. Pro rychlost střely tedy máme vztah

$$v = \frac{2\pi f s}{\varphi}.$$

Pro dané hodnoty je $v = 480 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Střela se pohybovala rychlostí $480 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



C3-1

Příklad 2

Autobus se začne pohybovat po oblouku kružnice o poloměru 240 m tak, že má tečné zrychlení o stálé velikosti $0,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vypočtete velikost normálového a celkového zrychlení autobusu v čase 30 s od začátku pohybu.

Řešení

$$r = 240 \text{ m}, a_t = 0,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, t = 30 \text{ s}; a_n = ?, a = ?$$

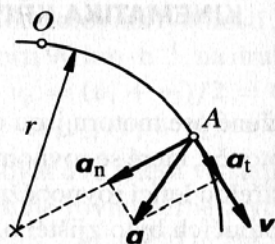
Autobus se začne pohybovat z bodu O s nulovou počáteční rychlostí (obráz. C3-2). V čase t je v bodě A a má rychlost $\mathbf{v}$.

Pro velikost normálového zrychlení platí vztah

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Poloměr r kružnice známe. Velikost rychlosti v pro čas t vypočteme pomocí tečného zrychlení a_t

$$v = a_t t.$$



C3-2

Pro normálové zrychlení tedy dostaneme vztah

$$a_n = \frac{a_t^2 t^2}{r}.$$

Celkové zrychlení $\mathbf{a}$ je vektorovým součtem tečného a normálového zrychlení, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$. Velikost celkového zrychlení je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Pro dané hodnoty je $a_n = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a = 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Autobus má v čase 30 s od začátku pohybu normálové zrychlení o velikosti $0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, jeho celkové zrychlení má velikost $0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Úlohy

První dvě úlohy řešte ve skupinách A a B.

Skupina A

1. Míč byl vržen rychlostí $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a při tom byl uveden do otáčivého pohybu úhlovou rychlostí $5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. O jaký úhel se míč otočí za dobu, za kterou urazí dráhu 2 m? [0,4 rad]

2. Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru 0,35 m s frekvencí 2,5 Hz. Vypočtete a) velikost rychlosti hmotného bodu, b) periodu pohybu, c) velikost zrychlení hmotného bodu. [a) $5,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; b) 0,4 s; c) $86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$]

3. Kolo o průměru 16 cm se otáčí s frekvencí 15 Hz a pomocí řemenového převodu pohání kolo o průměru 40 cm. Určete rychlost pohybu řemene a frekvenci otáček poháněného kola. [7,5 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 6 Hz]

4. Úhlová rychlost rotace Země je $7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, poloměr Země je přibližně 6 400 km. Vypočtete dostředivé zrychlení bodů na povrchu Země a) na rovníku, b) na 60° severní zeměpisné šířky.

[a) $0,034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; b) $0,017 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$]

Skupina B

1. Disk letí rychlostí $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a při tom se otáčí s frekvencí 5 Hz. Jakou dráhu urazí disk během jedné otočky? [4 m]

2. Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru 1,5 m rychlostí o stálé velikosti $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vypočtete a) úhlovou rychlost pohybu, b) frekvenci pohybu, c) velikost zrychlení hmotného bodu. [a) $8,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; b) 1,3 Hz; c) $96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$]

5. Předpokládejte, že se Země pohybuje kolem Slunce rovnoměrným pohybem po kružnici o poloměru 149,6 milionu kilometrů. Vypočítejte velikost rychlosti Země a velikost jejího zrychlení.
[29,8 km·s⁻¹, 5,9 · 10⁻³ m·s⁻²]
6. Kolo traktoru má poloměr 0,6 m. Jakou úhlovou rychlostí se otáčí kolo, jede-li traktor rychlostí 9 m·s⁻¹?
[15 rad·s⁻¹]
7. Hmotný bod se pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici. Jak se změní rychlost bodu a jeho zrychlení, vzroste-li úhlová rychlost pohybu na dvojnásobek?
[rychlost se zvětší dvakrát, zrychlení čtyřikrát]
8. Automobil projíždí zatáčkou tvaru části kružnice o poloměru 100 m. Jakou největší rychlostí smí řidič jet, nemá-li dostředivé zrychlení automobilu překročit hodnotu 4 m·s⁻²?
[20 m·s⁻¹]

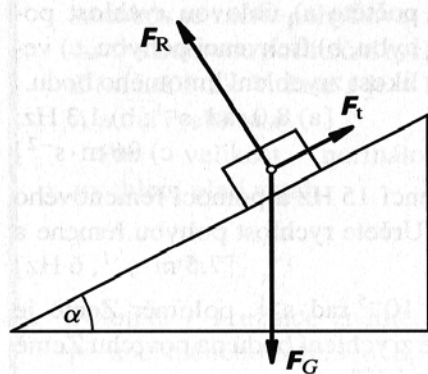
Cvičení 4 DYNAMIKA PŘÍMOČARÉHO POHYBU

Příklad 1

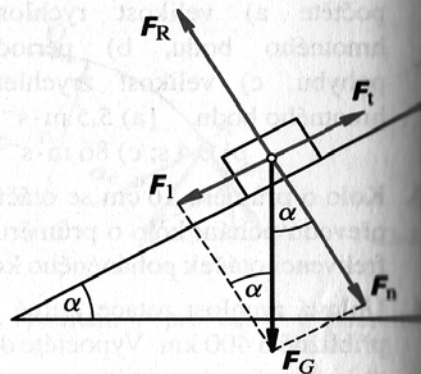
Po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°, klouže těleso. Součinitel smykového tření mezi tělesem a rovinou je 0,35. Vypočítejte zrychlení tělesa.

Řešení

$$\alpha = 30^\circ, f = 0,35, g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; a = ?$$



C4-1



C4-2

Na těleso působí Země tíhovou silou F_G ve svislém směru, nakloněná rovina reakcí F_R ve směru kolmém k rovině a třecí síla F_t ve směru rovnoběžném s rovinou (obr. C4-1). Výslednice sil, udělující tělesu zrychlení, je vektorovým součtem těchto sil, tedy

$$F = F_G + F_R + F_t.$$

Tíhovou sílu rozložíme na dvě navzájem kolmé složky, $F_G = F_1 + F_n$. Složka F_1 je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, složka F_n je k nakloněné rovině kolmá a vytváří kolmou tlakovou sílu (obr. C4-2). Těleso se nemůže pohybovat ve směru kolmém k rovině. Z toho vyplývá, že pohybové účinky sil F_n a F_R se navzájem ruší, $F_R + F_n = 0$. Pohybový účinek je dán výslednicí sil F_1 a F_t , které jsou rovnoběžné s nakloněnou rovinou. Síly mají navzájem opačný směr, velikost výslednice sil je tedy

$$F = F_1 - F_t.$$

Podle obr. C4-2 je $F_1 = F_G \sin \alpha = mg \sin \alpha$, $F_n = F_G \cos \alpha = mg \cos \alpha$. Velikost třecí síly je $F_t = f F_n = f mg \cos \alpha$.

Výslednice má velikost

$$F = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha.$$

Podle druhého pohybového zákona je velikost zrychlení tělesa

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha}{m},$$

neboli

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Pro dané hodnoty je $a = 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Těleso klouže dolů po nakloněné rovině se zrychlením $1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Příklad 2

Na niti vedené přes kladku jsou zavěšena závaží o hmotnostech 0,45 kg a 0,55 kg. Určete zrychlení závaží a sílu, kterou je napínána nit. Tření a hmotnost kladky i niti zanedbejte.

Řešení

$$m_1 = 0,45 \text{ kg}, m_2 = 0,55 \text{ kg}, g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; a = ?, F = ?$$