Poněvadž ve vrcholu C paraboly (obr. C9-3) má okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ vodorovný směr, y-ová složka rychlosti v_y je nulová. Tedy $v_0 \sin\alpha - gt_h = 0$ a odtud doba výstupu

$$t_h = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Po dosazení do y-ové souřadnice dostáváme

$$h = v_0 t_h \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_h^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Pro dané hodnoty je $h = 10$ m. Míč vystoupil do výšky 10 m.

c) Místo dopadu míče na povrch hřiště označíme D. Složky rychlosti $\boldsymbol{v}$ v bodě D mají velikost

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = |v_0 \sin\alpha - gt_d|$$

a po dosazení $t_d = 2v_0 \sin\alpha / g$ je $v_y = |-v_0 \sin\alpha|$. Velikost výsledné rychlosti je pak

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha} = v_0.$$

Míč dopadl na povrch hřiště stejně velkou rychlostí, jako byla jeho počáteční rychlost, tedy rychlostí $v_0 = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Příklad 3

Určete průměrnou rychlost a oběžnou dobu první umělé družice Země. Její vzdálenost od povrchu Země v perigeu byla 226 km, v apogeu 947 km.

Řešení

$h_1 = 2{,}26 \cdot 10^5$ m, $h_2 = 9{,}47 \cdot 10^5$ m, $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$;
$v = ?$, $T = ?$

Eliptickou trajektorii, po níž se družice pohybovala, nahradíme kružnicí o poloměru $R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země, h aritmetický průměr nejmenší a největší vzdálenosti družice od povrchu Země. Tedy

$$h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = 586\ \mathrm{km}.$$

Průměrná rychlost družice v se pak rovná velikosti kruhové rychlosti ve výšce h.

Tedy

$$v = v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z + h}}.$$

Pro $M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_Z = 6{,}38 \cdot 10^6$ m, $h = 0{,}586 \cdot 10^6$ m dostáváme $v_k = 7{,}56\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Pro oběžnou dobu družice platí $T = 2\pi(R_Z + h)/v_k$ a po dosazení příslušných hodnot $T = 5\,789$ s $= 96$ min. Průměrná rychlost první umělé družice Země byla $7{,}56\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ a její oběžná doba 96 minut.

Úlohy

V úlohách dosazujte $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a zanedbejte odpor vzduchu. První dvě úlohy řešte ve skupinách A a B.

Skupina A

1. Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete velikost jeho okamžité rychlosti v a výšku y v čase t. Nakreslete tabulku a výsledky do ní zapište.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	$\frac{y}{\mathrm{m}}$
1	.	.
2	.	.
3	.	.
4	.	.

2. Umělá družice se pohybuje kolem Země po kružnici o poloměru $r > R_Z$ rychlostí $v_k = 7{,}0\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Jak velkou rychlostí se pohybuje po kružnici o poloměru a) $2r$, b) $4r$?
[a) $4{,}9\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$; b) $3{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$]

Skupina B

1. Těleso je vrženo svisle vzhůru. Určete jeho dobu výstupu t_h a výšku vrhu h, je-li jeho počáteční rychlost v_0. Nakreslete tabulku a výsledky do ní zapište.

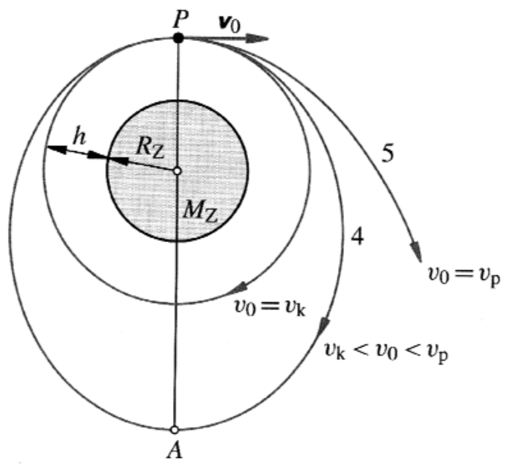
$\frac{v_0}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	$\frac{t_h}{\mathrm{s}}$	$\frac{h}{\mathrm{m}}$
10	.	.
20	.	.
30	.	.
40	.	.

2. Úniková rychlost kosmické sondy z povrchu Země o hmotnosti M_Z je $11{,}2\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Na jakou hodnotu by se změnila velikost únikové rychlosti, kdyby Země měla při stejných rozměrech hmotnost a) $2M_Z$; b) $4M_Z$?
[a) $15{,}8\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$; b) $22{,}4\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$]

při první kosmické rychlosti je

$$T = \frac{2\pi R_Z}{v_k} \doteq 5\,064\ \text{s} = 84{,}4\ \text{min}.$$

Jestliže je tělesu udělena v dané výšce h počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ o málo větší, než je kruhová rychlost $\boldsymbol{v}_k$, pohybuje se opět po **elipse** (obr. 5-20, trajektorie 4). Rovina elipsy prochází středem Země, v němž leží jedno ohnisko elipsy. Bod P, v němž má těleso na eliptické trajektorii nejmenší vzdálenost od středu Země, se nazývá **perigeum**, bod A, v němž má od středu Země vzdálenost největší, se nazývá **apogeum**.



5-20 Trajektorie tělesa při různých počátečních rychlostech

Velikost počáteční rychlosti v_0, která je tělesu udělena v bodě P, ovlivňuje tvar eliptické trajektorie. Čím je tato rychlost větší, tím je elipsa protáhlejší. Dá se dokázat, že při počáteční rychlosti o velikosti

$$v_p = \sqrt{\frac{2\varkappa M_Z}{R_Z + h}} = v_k\sqrt{2}$$

se změní uzavřená eliptická trajektorie na **parabolu** (trajektorie 5) a těleso se trvale vzdaluje od Země. Rychlost $\boldsymbol{v}_p$ se nazývá **parabolická rychlost** nebo také **úniková rychlost**.

V blízkosti povrchu Země, kde výška $h \ll R_Z$, je velikost parabolické rychlosti

$$v_p = \sqrt{\frac{2\varkappa M_Z}{R_Z}} = v_k\sqrt{2}$$

Pro $v_k = 7{,}9\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ je $v_p = 11{,}2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Tato hodnota parabolické rychlosti se nazývá **druhá kosmická rychlost**.

Při parabolické rychlosti sice těleso unikne z oblasti, v níž působí gravitační pole Země, zůstává však v gravitačním poli Slunce a stává se jeho družicí.

S ohledem na rotaci Země závisí dosažení hodnoty kruhové a parabolické rychlostí na tom, zda byla tělesa vystřelena ve smyslu nebo proti smyslu otáčení Země.

5

Úlohy

1 Určete velikost kruhové rychlosti družice, která se pohybuje ve výšce R_Z nad povrchem Země. Hmotnost Země $M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. [5,6 km·s^{-1}]

2 Jak by se změnila velikost kruhové rychlosti družice, kdyby se její hmotnost zdvojnásobila? Odpověď zdůvodněte.

3 Jak velká je rychlost Měsíce při pohybu kolem Země, předpokládáme-li jeho pohyb po kružnici o poloměru 384 000 km? Hmotnost Země je $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. [přibližně 1 km·s^{-1}]

4 Jak by se změnila úniková rychlost z povrchu Země, kdyby se rozměry Země zmenšily při stejné hmotnosti na polovinu? Odpověď zdůvodněte. [zvětšila by se $\sqrt{2}$krát]

5.7 Pohyby těles v gravitačním poli Slunce

Gravitační pole Slunce je mnohonásobně silnější než gravitační pole Země. Gravitační zrychlení na povrchu Slunce je téměř 28krát větší než na povrchu Země, tedy přibližně 280 m·s^{-2}. Úniková rychlost z povrchu Slunce je asi 618 km·s^{-1}. Slunce působí na všechna tělesa sluneční soustavy poměrně velkými gravitačními silami.

3. Jak velkou rychlostí tryská vodní proud z trubice vodotrysku, vystupuje-li voda do výšky 20 m? [$20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$]

4. Míč vržený svisle vzhůru se vrátil do místa vrhu za dobu 2 s. Do jaké výšky vystoupil? [5 m]

5. Z rozhledny vysoké 80 m byl vystřelen vodorovným směrem šíp rychlostí $30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Za jakou dobu a v jaké vzdálenosti od paty věže dopadl na vodorovnou rovinu okolního terénu? [4 s, 120 m]

6. V jaké výšce nad povrchem Země obíhá družice, jejíž kruhová rychlost je poloviční vzhledem ke kruhové rychlosti při povrchu Země? [$3R_Z$]

7. Určete velikost únikové rychlosti z povrchu Měsíce, Marsu a Jupiteru. Potřebné údaje vyhledejte ve fyzikálních tabulkách. [$2{,}4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $5{,}02\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $60\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$]

Cvičení 10 STATIKA TUHÉHO TĚLESA

Příklad 1

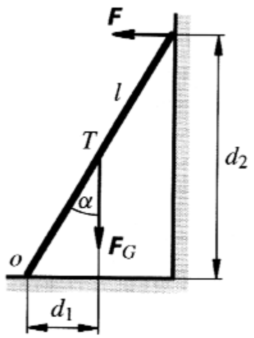
Žebřík o hmotnosti 6,0 kg je opřen jedním koncem o podlahu a druhým o svislou stěnu, se kterou svírá úhel 30°. Těžiště je uprostřed žebříku. Jakou nejmenší vodorovnou silou, působící na horním konci žebříku, odkloníme žebřík od stěny? Tření na podlaze je dostatečně velké, aby žebřík neklouzal.

Řešení

$m = 6{,}0\ \mathrm{kg}$, $\alpha = 30°$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $F = ?$

V těžišti žebříku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ svisle dolů, na horním konci vodorovná síla $\boldsymbol{F}$, kterou žebřík odkláníme od stěny (obr. C10-1). Žebřík je otáčivý kolem vodorovné osy o, procházející opěrnými body na podlaze.

Abychom žebřík odklonili od stěny, musí být moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení alespoň rovný momentu tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ vzhledem k téže ose. Označme l délku žebříku, d_1 rameno tíhové síly a d_2 rameno síly $\boldsymbol{F}$.



C10-1

Velikost momentu tíhové síly je

$$M_1 = F_G d_1 = F_G \frac{l}{2} \sin\alpha,$$

velikost momentu síly $\boldsymbol{F}$ je

$$M_2 = F d_2 = F l \cos\alpha.$$

Z podmínky $M_1 = M_2$ vyplývá vztah

$$F_G \frac{l}{2} \sin\alpha = F l \cos\alpha$$

a odtud hledaná velikost síly

$$F = \frac{1}{2} F_G \operatorname{tg}\alpha.$$

Dosadíme-li $F_G = mg$, dostaneme pro velikost síly $\boldsymbol{F}$ vztah

$$F = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\alpha.$$

Pro dané hodnoty je $F = 17\ \mathrm{N}$.

Nejmenší vodorovná síla, kterou žebřík odkloníme od stěny, má velikost 17 N.

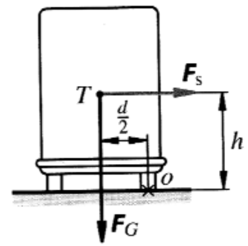
Příklad 2

Nákladní automobil projíždí neklopenou zatáčkou, kterou tvoří část kružnice o poloměru 50 m. Rozchod kol automobilu je 1,9 m, výška těžiště nad vozovkou je 1,4 m. Jakou největší rychlostí může řidič projet zatáčkou, aniž by se automobil převrátil? Předpokládáme, že tření je dostatečně velké, aby automobil nedostal smyk.

Řešení

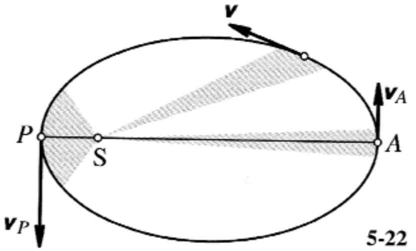
$r = 50\ \mathrm{m}$, $d = 1{,}9\ \mathrm{m}$, $h = 1{,}4\ \mathrm{m}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $v_{max} = ?$

Na automobil působí tíhová síla o velikosti $F_G = mg$, směřující svisle dolů. V zatáčce působí na automobil setrvačná odstředivá síla o velikosti $F_s = mv^2/r$, směřující od středu kruhové zatáčky. Obě síly mají působiště v těžišti automobilu (obr. C10-2).



C10-2

má planeta v periheliu, nejdelší v aféliu. Důsledkem této skutečnosti je, že rychlost v_P planety v periheliu je větší než rychlost v_A planety v aféliu. Pohyb planety po eliptické trajektorii je tedy nerovnoměrný. Pro velikost okamžité rychlosti v platí $v_P > v > v_A$.



5-22 Ke druhému Keplerovu zákonu

Země prochází periheliem v lednu, aféliem v červenci. Proto je na severní polokouli zimní půlrok kratší (179 dní) než půlrok letní (186 dní).

Třetí Keplerův zákon uvádí vztah mezi oběžnými dobami planet a hlavními poloosami jejich trajektorií.

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.

Označíme-li oběžné doby dvou planet T_1, T_2, délky hlavních poloos a_1, a_2, zapisujeme třetí Keplerův zákon vztahem

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Zákon platí přesně za předpokladu, že hmotnosti planet jsou zanedbatelně malé vzhledem k hmotnosti Slunce, což je u všech planet sluneční soustavy splněno.

Považujeme-li trajektorie planet přibližně za kružnice, můžeme třetí Keplerův zákon zapsat ve tvaru

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3},$$

kde r_1, r_2 jsou střední vzdálenosti planet od Slunce.

Střední vzdálenost Země od Slunce $r = 149{,}6 \cdot 10^6$ km se nazývá **astronomická jednotka**, značí se AU (astronomical unit). Vzdálenosti ostatních planet v jednotkách AU jsou uvedeny v tabulce 3.

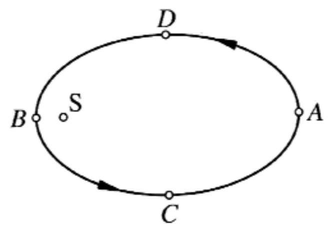
Třetí Keplerův zákon umožňuje vypočítat střední vzdálenost libovolné planety, známe-li její oběžnou dobu a odpovídající veličiny pro Zemi. Je-li např. oběžná doba Jupiteru $T_1 = 12$ roků a víme-li, že pro Zemi platí $T_2 = 1$ rok, $r_2 = 1$ AU, pak střední vzdálenost Jupiteru od Slunce je

$$r_1 = r_2\sqrt[3]{T_1^2/T_2^2} = 1\,\text{AU} \cdot \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2\ \text{AU}.$$

Keplerovy zákony platí nejen pro pohyby planet, ale obecně pro každou soustavu těles, která se pohybují v centrálním gravitačním poli ústředního tělesa, jehož hmotnost je mnohonásobně větší než hmotnost těles obíhajících. Platí proto také pro soustavu umělých družic Země nebo pro soustavu měsíců obíhajících kolem Jupiteru. 5

Úlohy

1 Ve kterém místě trajektorie (obr. 5-23) má planeta nejmenší rychlost? Ve kterém má největší rychlost?



5-23 K úloze 1 a 2

2 Jaký pohyb koná planeta (obr. 5-23) z bodu A do bodu C? Jaký pohyb z bodu B do bodu D?

3 Vysvětlete pohyb planety z hlediska zákona zachování mechanické energie.

4 Určete střední vzdálenost planety Uran od Slunce, je-li její oběžná doba 84 let. [19 AU]

5 Určete hmotnost Slunce, víte-li že oběžná doba Země je 1 rok a střední vzdálenost Země od Slunce $150 \cdot 10^6$ km. [$2 \cdot 10^{30}$ kg]

To však není jediný poznatek, který lze získat o naší Zemi. Použijeme-li ještě vztah pro objem Země

$$V_Z = \frac{4}{3}\pi R_Z^3,$$

můžeme určit průměrnou hustotu Země

$$\varrho = \frac{M_Z}{V_Z} = \frac{3a_g}{4\pi\varkappa R_Z} \doteq 5{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

Protože hustota povrchových vrstev zemské kůry je jen $2{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, usuzujeme z uvedeného výsledku na větší hustotu zemského nitra, a tím i na jeho pravděpodobné složení.

Úlohy

První dvě úlohy řešte ve skupinách A a B.

Skupina A

1. V daném místě gravitačního pole působí na těleso o hmotnosti m gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$, která mu uděluje zrychlení $\boldsymbol{a}_g$. Nakreslete tabulku a zapište do ní zbývající hodnoty veličin.

$\frac{F_g}{\mathrm{N}}$	$\frac{m}{\mathrm{kg}}$	$\frac{a_g}{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}$
250	25	.
.	5	24
128	.	1,6

2. Gravitační zrychlení na povrchu Země o poloměru R_Z je přibližně $10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Určete velikost gravitačního zrychlení ve vzdálenosti a) $2R_Z$ od středu Země, b) $\sqrt{2}R_Z$ od středu Země.
[a) $2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, b) $5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$]

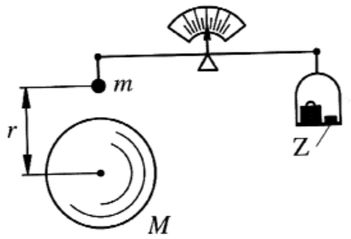
Skupina B

1. V daném místě gravitačního pole působí na těleso o hmotnosti m gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$, která mu uděluje zrychlení $\boldsymbol{a}_g$. Nakreslete tabulku a zapište do ní zbývající hodnoty veličin.

$\frac{F_g}{\mathrm{N}}$	$\frac{m}{\mathrm{kg}}$	$\frac{a_g}{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}$
.	12	10
10	4	.
40	.	5

2. Na povrchu planety Jupiter o poloměru R_J je gravitační zrychlení $26\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Jak velké je gravitační zrychlení ve vzdálenosti: a) $2R_J$ od středu planety, b) $3R_J$ od středu planety?
[a) $6{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, b) $2{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$]

3. Jednoduchou metodu měření gravitační konstanty navrhl fyzik P. Jolly. Pod kouli o hmotnosti m, předem vyváženou na citlivých rovnoramenných vahách (obr. C8-2), dopravil velkou olověnou kouli o hmotnosti M. Působením gravitační síly mezi koulemi se jazýček vah vychýlil. Rovnováha se obnovila přidáním závaží Z na misku vah. Navrhněte postup pro změření gravitační konstanty a vypočítejte její číselnou hodnotu, je-li $m = 10$ kg, $M = 6$ tun, $r = 60$ cm, $Z = 1{,}1$ mg. [$6{,}5 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$]



C8-2

4. Vzdálenost Země od Slunce je 150 milionů km, oběžná doba Země 365 dní. Určete a) velikost zrychlení, které Slunce uděluje Zemi, b) hmotnost Slunce.
[a) $5{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, b) $2 \cdot 10^{30}$ kg]

5. V jaké nadmořské výšce je gravitační zrychlení poloviční vzhledem ke gravitačnímu zrychlení na povrchu Země?
[$h = R_Z(\sqrt{2} - 1) = 2\,640$ km]

6. Hmotnost planety Jupiter je $M_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg, její poloměr $R_J = 70\,000$ km, doba rotace $T_J = 9$ h 50 min. Určete velikost gravitačního a tíhového zrychlení na rovníku planety. Planetu považujte za homogenní kouli.
[$a_g = 25{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $g = a_g - 4\pi^2 R_J / T^2 = (25{,}9 - 2{,}2)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 23{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$]

Cvičení 9 POHYB TĚLES V GRAVITAČNÍM POLI

Příklad 1

Z věže vysoké 45 m byl vržen vodorovným směrem kámen rychlostí $20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Věž stojí na vodorovné rovině. Určete v čase 1 s, 2 s a 3 s od okamžiku vrhu a) polohu kamene, b) velikost jeho okamžité rychlosti. Ve vhodném měřítku zakreslete trajektorii kamene s vyznačením jeho rychlosti v uvedeném čase.

Vybrané údaje sluneční soustavy:

Sluneční soustava							
Těleso	Hmotnost [kg]	Poloměr tělesa [m]	Doba rotace [den] / [h]	Číselná výstřednost	Poloměr oběžné dráhy [m]	Oběžná doba [rok] / [d]	Zrychlení na povrchu [$m.s^{-2}$]
Slunce	$1{,}98.10^{30}$	$6{,}96.10^{8}$	-	-	-	-	274,1
Merkur	$3{,}28.10^{23}$	$2{,}44.10^{6}$	58,65 d	0,2056	$5{,}79.10^{10}$	0,24 r	3,60
Venuše	$4{,}87.10^{24}$	$6{,}05.10^{6}$	243,01 d	0,0068	$1{,}08.10^{11}$	0,62 r	8,87
Země	$5{,}98.10^{24}$	$6{,}38.10^{6}$	23,93 h	0,0167	$1{,}50.10^{11}$	1 r	9,82
Mars	$6{,}39.10^{23}$	$3{,}39.10^{6}$	24,62 h	0,0934	$2{,}28.10^{11}$	1,88 r	3,76
Jupiter	$1{,}90.10^{27}$	$7{,}14.10^{7}$	~10 h	0,0483	$7{,}78.10^{11}$	11,86 r	26,00
Saturn	$5{,}69.10^{26}$	$6{,}02.10^{7}$	~10 h	0,0560	$1{,}43.10^{12}$	29,46 r	11,20
Uran	$8{,}69.10^{25}$	$2{,}55.10^{7}$	~16 h	0,0461	$2{,}87.10^{12}$	84,01 r	9,40
Neptun	$1{,}02.10^{26}$	$2{,}47.10^{7}$	~16 h	0,0100	$4{,}50.10^{12}$	164,79 r	12,00
Pluto	$1{,}19.10^{22}$	$1{,}18.10^{6}$	6,38 d	0,2484	$5{,}90.10^{12}$	248,43 r	-
Měsíc	$7{,}37.10^{22}$	$1{,}74.10^{6}$	-	0,0550	$3{,}84.10^{8}$	27,3 d	1,62

Gravitační konstanta: $\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ N\cdot m^{2}\cdot kg^{-2}$
Astronomická jednotka: $1\ AU = 1{,}496.10^{11}\ m$