

1

PŘEDMĚT FYZIKY FYZIKÁLNÍ VELIČINY MATEMATIKA VE FYZICE

Základní pojmy:

- Předmět studia fyziky, formy hmoty, fyzikální pole, fyzikální veličiny.
- Soustava SI, násobky a díly jednotek.
- Skalární a vektorové veličiny, operace s vektorovými veličinami.
- Diferenciální a integrální počet ve fyzice

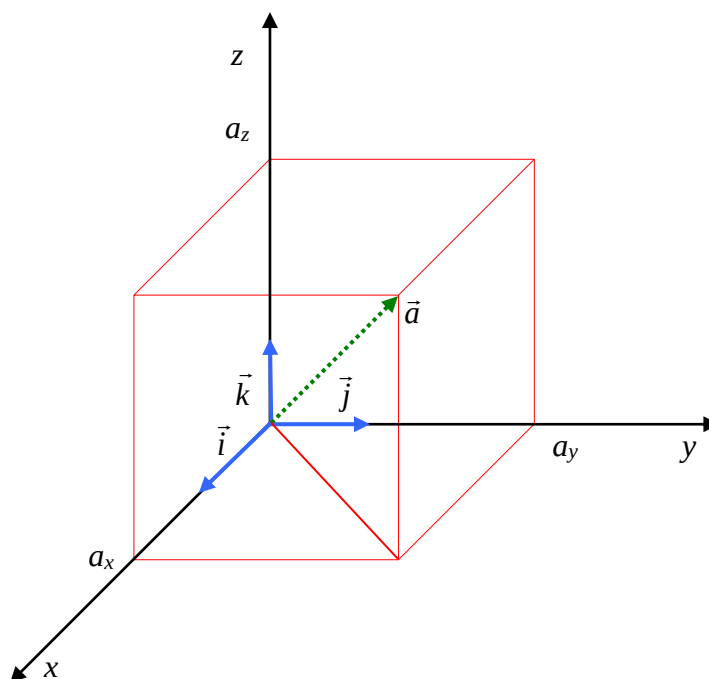
Základní vztahy:

- Kartézská soustava souřadnic x, y, z

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

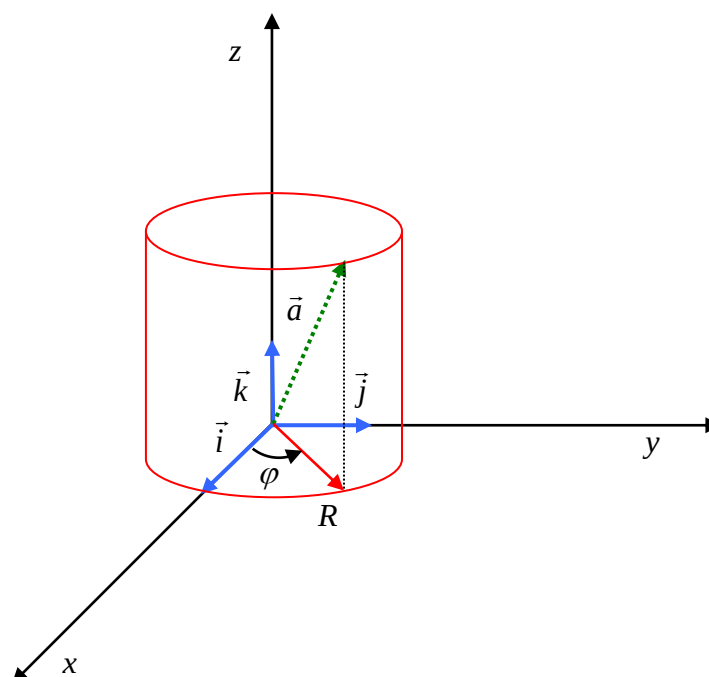
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



- Válcová soustava souřadnic R, z, φ

$$x = R \cdot \cos \varphi, \quad y = R \cdot \sin \varphi, \quad z = z$$

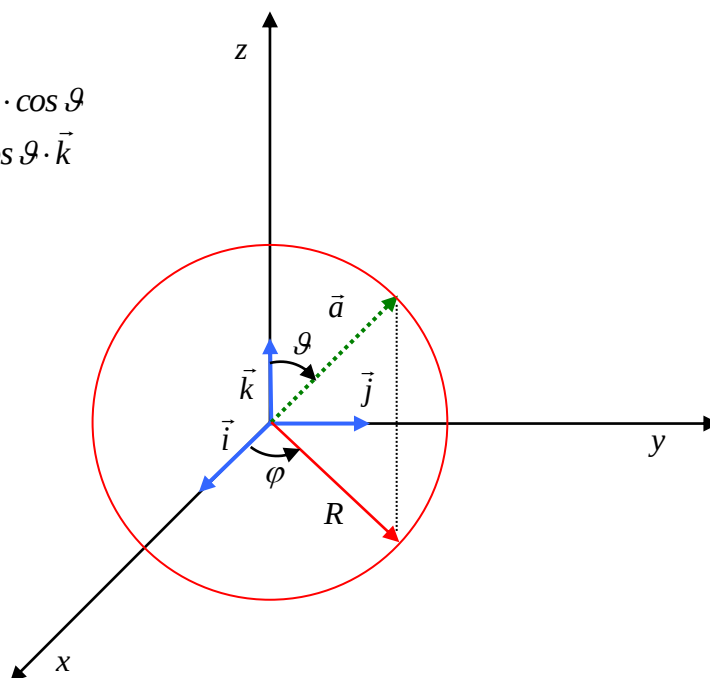
$$\vec{a} = R \cdot \cos \varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \sin \varphi \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$



- Sférická soustava souřadnic R, φ, θ

$$x = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = R \cdot \cos \theta$$

$$\vec{a} = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{i} + R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{j} + R \cdot \cos \theta \cdot \vec{k}$$



- Vektor v kartézských souřadnicích:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

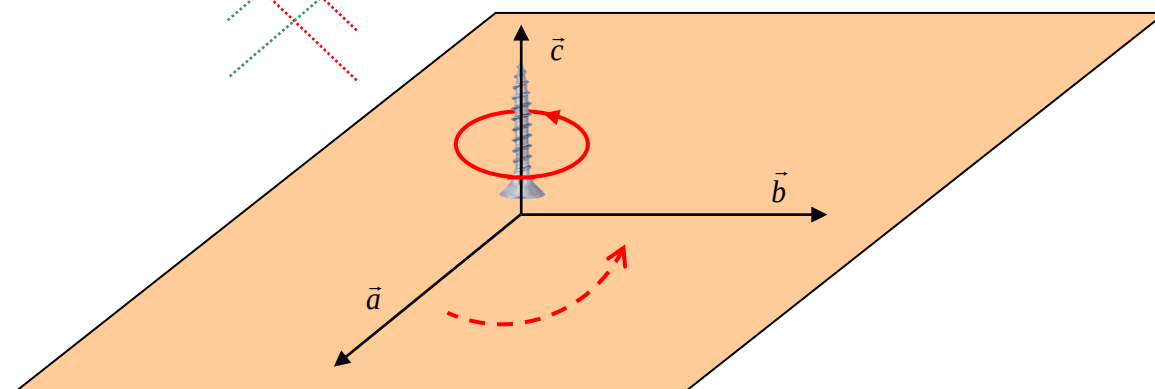
- Skalární součin vektorů:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

- Vektorový součin vektorů:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad c = a \cdot b \cdot \sin \alpha, \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

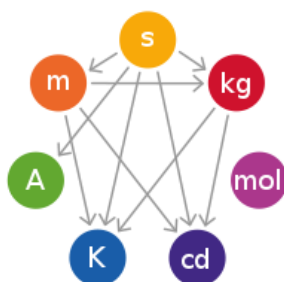
$$\det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \underbrace{(a_y b_z \vec{i} + a_x b_z \vec{j} + a_z b_x \vec{j})}_{\text{red dotted line}} - \underbrace{(a_y b_x \vec{k} + a_z b_y \vec{i} + a_x b_z \vec{j})}_{\text{green dotted line}}$$



Soustava SI – základní jednotky a veličiny

Fyzikální veličina	Značka fyzikální veličiny	Název jednotky SI	Značka jednotky SI	Definice jednotky SI
Elektrický proud	I, i	ampér	A	Ampér je definován fixací číselné hodnoty elementárního náboje, aby byla rovna $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$, je-li vyjádřena jednotkou C, rovnou A s, kde sekunda je definována pomocí $\Delta\nu\text{Cs}$.
Svítivost	I	kandela	cd	Kandela je definována fixací číselné hodnoty světelné účinnosti monochromatického záření o frekvenci $540 \cdot 10^{12}$ Hz, K_{cd} , aby byla rovna 683, je-li vyjádřena jednotkou lm W^{-1} , rovnou cd sr W^{-1} , nebo $\text{cd sr kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^3$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí h, c a $\Delta\nu\text{Cs}$.
Délka	l, s	metr	m	Metr je definován fixací číselné hodnoty rychlosti světla ve vakuu c , aby byla rovna 299 792 458, je-li vyjádřena jednotkou m s^{-1} , kde sekunda je definována pomocí cesiové frekvence $\Delta\nu\text{Cs}$.
Hmotnost	m	kilogram	kg	Kilogram je definován fixací číselné hodnoty Planckovy konstanty h , aby byla rovna $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$, je-li vyjádřena jednotkou J s, rovnou $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, kde metr a sekunda jsou definovány pomocí c a $\Delta\nu\text{Cs}$.
Látkové množství	n	mol	mol	Mol je definován fixací číselné hodnoty Avogadrovy konstanty, aby byla rovna $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$, je-li vyjádřena jednotkou mol^{-1} .
Termodynamická teplota	T	kelvin	K	Kelvin je definován fixací číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty, aby byla rovna $1,380\,649 \cdot 10^{-23}$, je-li vyjádřena jednotkou J K^{-1} , rovnou $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí h, c a $\Delta\nu\text{Cs}$.
Čas	t	sekunda	s	Sekunda je definována fixací číselné hodnoty cesiové frekvence $\Delta\nu\text{Cs}$, tedy frekvence přechodu mezi hladinami velmi jemného rozštěpení neporušeného základního stavu atomu cesia 133, aby byla rovna 9 192 631 770, je-li vyjádřena jednotkou Hz, rovnou s^{-1} .

Vzájemný vztah mezi základními jednotkami



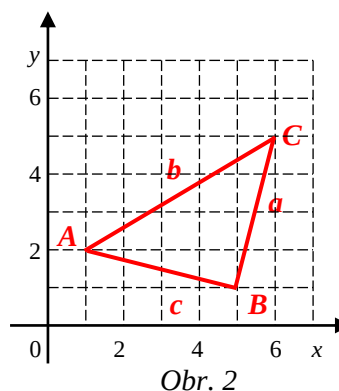
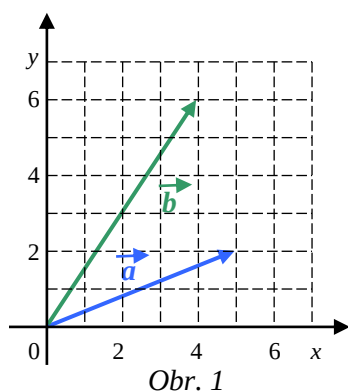
Početní úlohy:

1. Vyjádřete vektory $\vec{a}, \vec{b}$ (obr.1) v kartézské souřadné soustavě. Určete součet vektorů $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ a rozdíly vektorů $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ a $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$.

$$[\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j}; \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j}; \vec{c} = 9\vec{i} + 8\vec{j}; \vec{d} = \vec{i} - 4\vec{j}; \vec{e} = -\vec{i} + 4\vec{j}]$$

2. Určete vektory polohy středů stran trojúhelníku ABC (obr. 2).

$$[\vec{a} = 5,5\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{b} = 3,5\vec{i} + 3,5\vec{j}; \vec{c} = 3\vec{i} + 1,5\vec{j}]$$



3. Určete skalární součin c a vektorový součin $\vec{d}$ vektorů $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

$$[c = 10; \vec{d} = 22\vec{i} - 4\vec{j} - 10\vec{k}; d = 24,5]$$

4. Určete úhel vektorů $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ a $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$[26,9^\circ]$$

5. Určete velikost práce vykonané silou $\vec{F} = (5\text{ N})\vec{i} + (2\text{ N})\vec{k}$, která přemístí těleso na úseku dráhy $\Delta\vec{s} = (20\text{ m})\vec{i} + (10\text{ m})\vec{k}$.

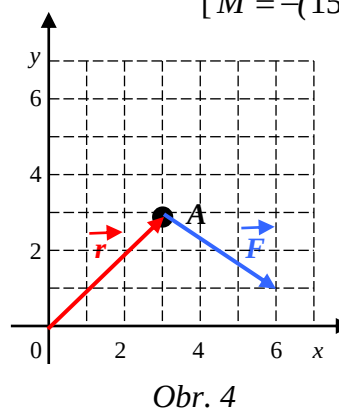
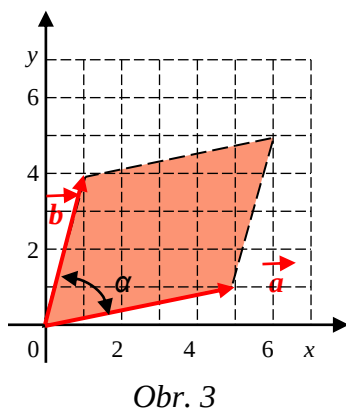
$$[120\text{ J}]$$

6. Určete velikost plochy rovnoběžníku na obr. 3 a úhel α vektorů $\vec{a}, \vec{b}$.

$$[S = 19; \alpha = 64,6^\circ]$$

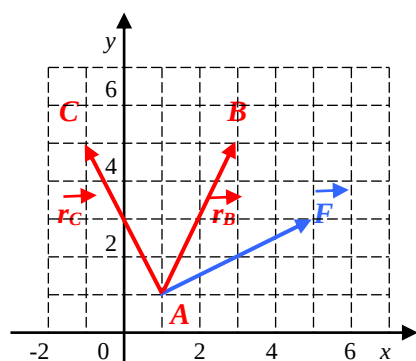
7. Určete velikost momentu síly $\vec{M}$, která působí v bodě A vzhledem k počátku systému (obr. 4).

$$[\vec{M} = -(15\text{ Nm})\vec{k}; M = 15\text{ Nm}]$$



8. Určete velikost mechanické práce vykonané během přemístění tělesa z bodu A do bodu B a z bodu A do bodu C (obr. 5) v důsledku působení konstantní síly $\vec{F}$.

$$[W_{AB} = 16 \text{ J}; W_{AC} = 0]$$



Obr. 5

9. Určete velikost výsledné síly působící na hmotný bod, na který působí síla $\vec{F}_1$ ($F_1 = 9 \text{ N}$) a síla $\vec{F}_2$ ($F_2 = 6 \text{ N}$). Vektor síly $\vec{F}_1$ svírá se silou $\vec{F}_2$ úhel 60° .

$$[F_R = 13 \text{ N}]$$

Základní pravidla diferenciálního počtu

Konstanta	$y = k$ $y = 10$	$y' = 0$ $y' = 0$
Součin konstanty a funkce	$y = c \cdot f(x)$ $y = 10 \cdot x^3$ $y = 5 \cdot \sin x$	$y' = c \cdot f'(x)$ $y' = 30 \cdot x^2$ $y' = 5 \cdot \cos x$
Součet a rozdíl dvou funkcí	$y = c_1 \cdot f(x) \pm c_2 \cdot g(x)$ $y = 4 \cdot \cos x + 2 \cdot x^2$ $y = 10 - 5 \cdot x^4$	$y' = c_1 \cdot f'(x) \pm c_2 \cdot g'(x)$ $y' = -4 \cdot \sin x + 4 \cdot x$ $y' = -20 \cdot x^3$
Součin dvou funkcí	$y = f(x) \cdot g(x)$ $y = x^3 \cdot \sin x$ $y = 10 \cdot x \cdot \cos x$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $y' = 3 \cdot x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$ $y' = 10 \cdot \cos x - 10 \cdot x \cdot \sin x$
Podíl dvou funkcí	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ $y = \frac{4 \cdot x^2}{\sin x}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ $y' = \frac{8 \cdot x \cdot \sin x - 4 \cdot x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$
Složená funkce	$y = f(g(x))$ $y = (5 - x)^2$ $y = 2 \cdot \sin(5 \cdot x)$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $y' = -2 \cdot (5 - x)$ $y' = 10 \cdot \cos(5 \cdot x)$
Derivace vybraných funkcí	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
	$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$

Početní úlohy:

1. Vypočtěte derivace:

a) $y = 2 + x - x^2$

b) $y = (x - 2)(x - 3)$

c) $y = \frac{2x}{1 - x^2}$

d) $y = \sin(3x + 5)$

e) $y = \ln \operatorname{tg} x$

f) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

g) $y = \frac{1}{\ln x}$

2. Určete rychlost a zrychlení hmotného bodu v závislosti na čase na základě znalosti dráhy hmotného bodu jako funkce času:

a) $s(t) = 4t^2 + 5t + 10$

$[v(t) = 8t + 5; a(t) = 8]$

b) $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$

$[v(t) = gt; a(t) = g]$

c) $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

$[v(t) = v_0 - gt; a(t) = -g]$

3. Určete rychlost a zrychlení harmonického pohybu hmotného bodu při znalosti rovnice pro okamžitou výchylku hmotného bodu:

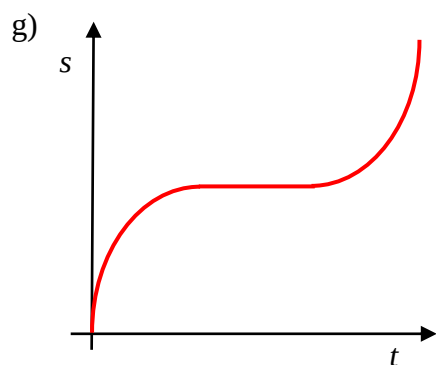
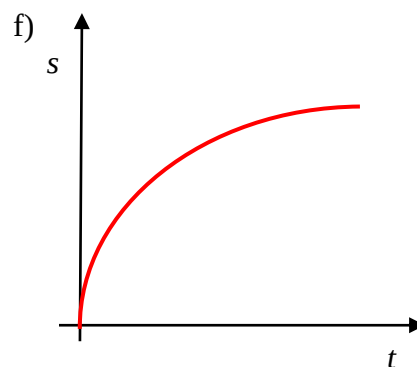
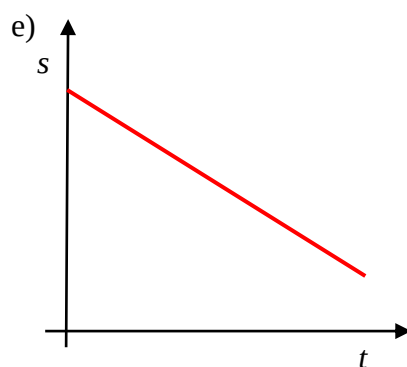
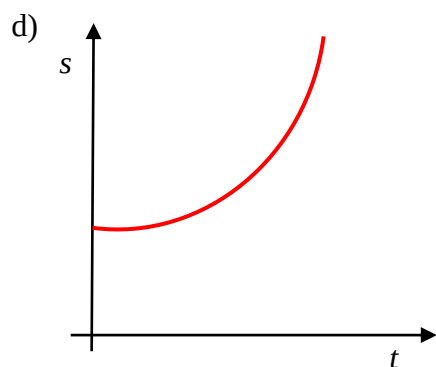
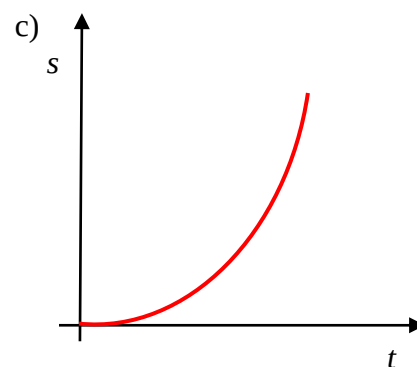
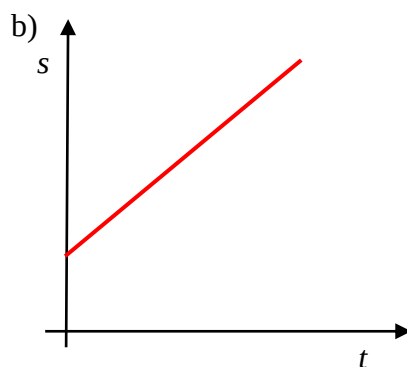
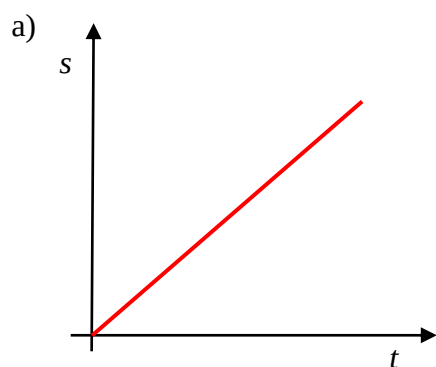
a) $y(t) = y_m \sin \omega t$

$[v(t) = \omega y_m \cos \omega t; a(t) = -\omega^2 y_m \sin \omega t]$

b) $y(t) = 0,2 \sin 10\pi t$

$[v(t) = 2\pi \cos 10\pi t; a(t) = -20\pi^2 \sin 10\pi t]$

4. Určete graficky časový průběh rychlosti a zrychlení pohybů, pro které jsou uvedeny grafy závislosti dráhy na čase:



Základní pravidla integrálního počtu

Definice	$F'(x) = f(x) \Rightarrow$ $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow$	$\int f(x)dx = F(x) + k$ $\int \cos x \, dx = \sin x + k$
Součin konstanty a funkce	$y = a f(x)$ $y = 5 \cdot x$	$\int a f(x)dx = a \int f(x)dx = a F(x) + k$ $\int 5 \cdot x \, dx = 5 \cdot \int x \, dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2} + k$
Součet a rozdíl dvou funkcí	$y = a f(x) \pm b g(x)$ $y = 2 \cdot \cos x \pm 5 \cdot e^x$	$\int [a f(x) \pm b g(x)]dx = a \int f(x)dx \pm b \int g(x)dx = a F(x) + b G(x) + k$ $\int [2 \cdot \cos x \pm 5 \cdot e^x]dx = 2 \cdot \int \cos x \, dx \pm 5 \cdot \int e^x \, dx = 2 \cdot \sin x \pm 5 \cdot e^x + k$
Integrace vybraných funkcí	$y = k$	$\int a \, dx = a x + k$
	$y = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
	$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + k$
	$y = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + k$
	$y = \sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + k$
	$y = e^x$	$\int e^x dx = e^x + k$
	$y = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
Definice určitého integrálu	$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	

Počtení úlohy:

1. Vypočtete neurčitý a určitý integrál:

a) $\int (x^5 - 4x^3) dx$

b) $\int \left(\frac{1-x^2}{x} \right) dx$

c) $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx$

d) $\int \sin \omega t dt$

e) $\int_0^{\pi} \sin x dx$

2. Určete rovnici rychlosti a dráhy jako funkce času pohybu hmotného bodu pro dané závislosti zrychlení pohybu v závislosti na čase:

a) $a(t) = 0$

$[v(t) = v_0; s(t) = v_0 t]$

b) $a(t) = 5$

$[v(t) = v_0 + 5t; s(t) = s_0 + v_0 t + 2,5t^2]$

c) $a(t) = -g$

$[v(t) = v_0 - gt; h(t) = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2]$

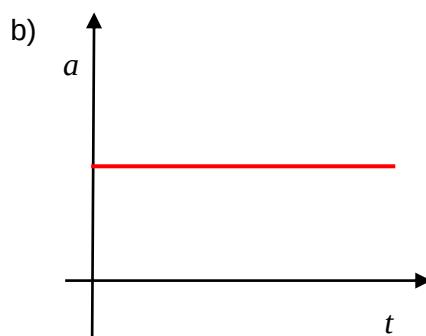
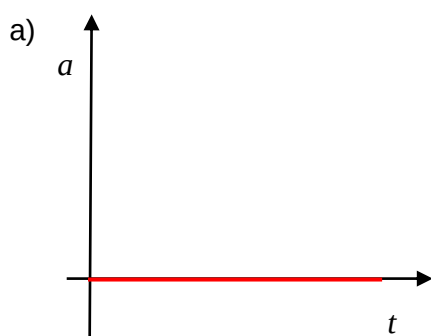
3. Určete velikost elektrického náboje, který projde vodičem v čase 5 s jestliže intenzita elektrického proudu roste v čase lineárně z nuly na hodnotu 10 mA.

$[0,025 \text{ C}]$

4. Určete velikost práce, kterou je nutno vynaložit na deformaci pružiny při jejím prodloužení o 20 cm. Konstanta pružnosti pružiny je $k = 100 \text{ N/m}$.

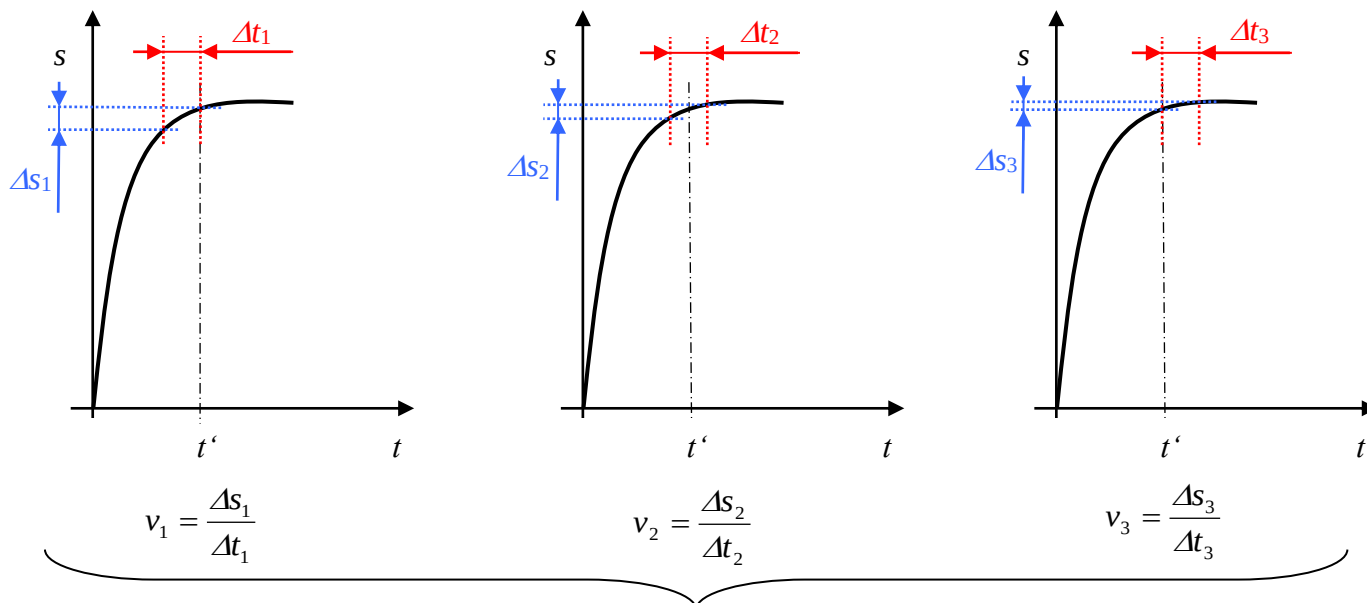
$[4 \text{ J}]$

5. Určete graficky časový průběh rychlosti a dráhy pohybu hmotného bodu pro uvedené časové průběhy zrychlení pohybu hmotného bodu:



POJEM A GRAFICKÁ INTERPRETACE DERIVACE

Jaká je velikost okamžité rychlosti v čase $t = t'$?



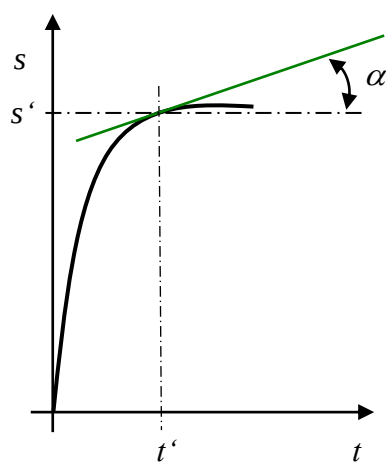
$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$$

$$\Delta s_1 > \Delta s_2 > \Delta s_3$$

$$v_1 > v_2 > v_3$$

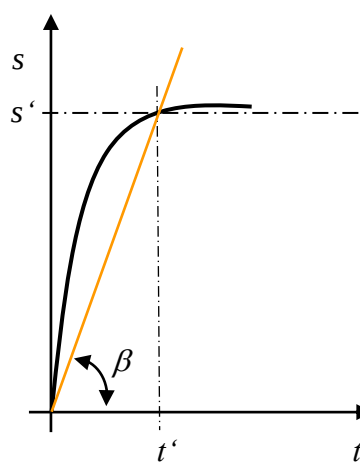
?

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t')}{\Delta t} = \frac{ds(t')}{dt} = s'(t') = \dot{s}(t')$$



$$\operatorname{tg} \alpha = v = \frac{ds(t')}{dt} = s'(t')$$

okamžitá rychlost v čase t'



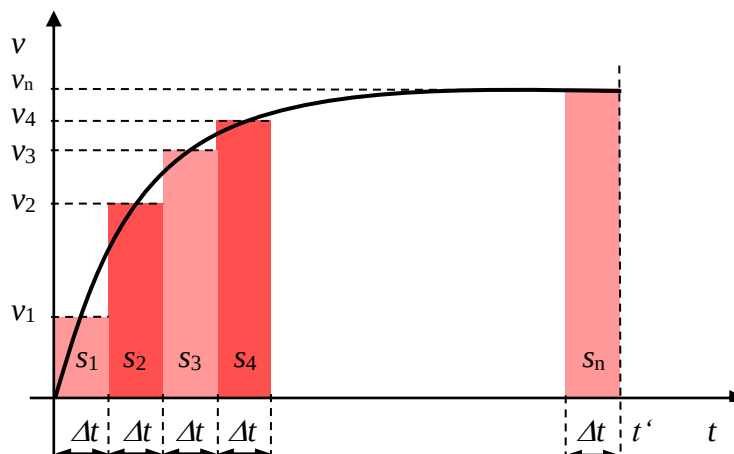
$$\operatorname{tg} \beta = v_m = \frac{s(t')}{t'}$$

průměrná rychlost v čase t'

POJEM A GRAFICKÁ INTERPRETACE INTEGRACE

Jaká je velikost dráhy ujeté v intervalu času Δt ?

$$v \approx \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s(t) \approx v \cdot \Delta t$$



Jaká je velikost dráhy ujeté v čase t' ?

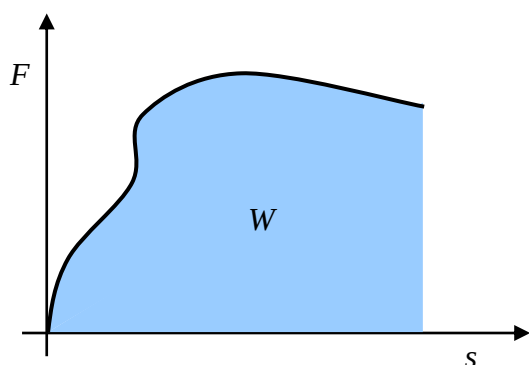
$$s(t') \approx v_1 \cdot \Delta t + v_2 \cdot \Delta t + v_3 \cdot \Delta t + v_4 \cdot \Delta t + \dots + v_n \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t$$

Přesně:

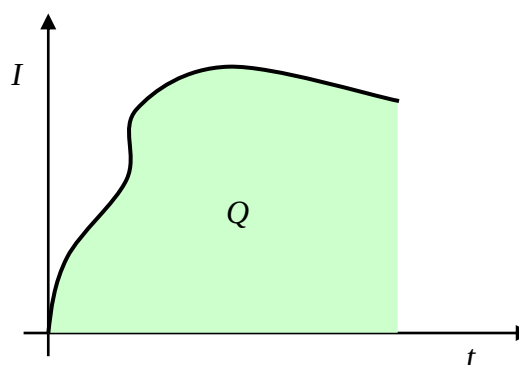
$$v = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow ds(t) = v \cdot dt$$

$$s(t') = v_1 \cdot dt + v_2 \cdot dt + v_3 \cdot dt + v_4 \cdot dt + \dots + v_{\infty} \cdot dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i \cdot \Delta t = \int_0^{t'} v(t) \cdot dt$$

Jiné příklady použití integrálního počtu:



$$W = \int F(s) \cdot ds$$



$$Q = \int I(t) \cdot dt$$